

1 学期の復習

$X \neq \emptyset$ とする .

1. X 上の 2 項関係 $\sim$ が X 上の同値関係であるとは、次の 3 条件が満足されること :

- $\forall a \in X$ に対して , $a \sim a$;
- $\forall a, b \in X$ に対して , $a \sim b \Rightarrow b \sim a$;
- $\forall a, b, c \in X$ に対して , $a \sim b \sim c \Rightarrow a \sim c$.

2. $\sim$ を X 上の同値関係とする . $a \in X$ に対して集合 $[a] = \{b \in X : b \sim a\}$ を a の属する同値類という . 同値類の全体は X の分割を与える .

3. X 上の 2 項関係 $\leq$ が X 上の (等号つき) 順序であるとは ,

- $\forall a \in X$ に対して , $a \leq a$;
- $\forall a, b, c \in X$ に対して , $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c$.
- $\forall a, b \in X$ に対して , $a \leq b \leq a \Rightarrow a = b$.

4. X 上の 2 項関係 $<$ が X 上の (等号なし) 順序であるとは ,

- $a < b < a$ となる $a, b \in X$ は存在しない;
- $\forall a, b, c \in X$ に対して , $a < b < c \Rightarrow a < c$.

このとき , $(X, <)$ を順序集合とよぶ .

5. $(X, <)$ が全順序集合であるとは , $<$ が X 上の順序であり , なおかつ次が成立すること :
 $\forall a, b \in X$ に対して ,

$$a = b \text{ or } a < b \text{ or } b < a$$

6. 自然数の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ とその上の演算 (加法乗法) がわかっているとして , $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ とその上の演算を構成した .

(a) $\mathbb{Z}$ の構成 : $\mathbb{N}^2$ 上に同値関係を定義し , その同値類全体を $\mathbb{Z}$ とし , その上の演算を定義した . このとき演算の定義が整合的になること (well-defined) が注意すべき点であった .

(b) $\mathbb{Q}$ の構成 : $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ の上に新しい同値関係を定義し , その同値類全体を $\mathbb{Q}$ とした . $\mathbb{Q}$ の上に演算が整合的に入ることを調べた .

(c) $\mathbb{R}$ の構成 : 各項が有理数からなるコーシー列全体に同値関係を定義した . その同値類を $\mathbb{R}$ とした . $\mathbb{R}$ が実数の集合として望まれるいくつかの性質を満たすことを調べた .

2 学期の学習事項 (順不同)

1. 整列集合
2. 選択公理
3. Zorn の補題
4. 整列可能性定理
5. 超限帰納法
6. ベルンシュタインの定理
7. 濃度
8. べき集合の濃度
9. (できれば) 順序数 , 基数など

選択公理は (超越的な) 存在に関する主張である . ある数学的な対象の存在を示すとき , 具体的にその存在が示されれば , これほど良いことはない . しかし具体的でなくても存在すると推量されることは実世界にもある . 例えば , 次のような議論がある .

(*) 人間の髪の毛の本数は多い人で 15 万本 . これに対してつくば市の人口は 20 万人 . したがってつくば市民の中で髪の毛の本数の全く同じ 2 人が存在する .

この場合に , どの二人が同じ本数を有するかは分からない . しかしそういう二人がいるのは誰もが認めることだろう . 数学においても , 具体的 (あるいは構成的) 存在でなくても , その存在を認めることが多々ある . 選択公理はそのような主張の一つである . しかし , ある程度数学をしてきた人にとっては「選択公理」はことさら言われなくても当たり前^{*1} として感じられるものである .

2 学期前半の目標の一つに選択公理を正しく理解して応用することがあげられる . 選択公理は直感的に理解しやすい主張ではあるが , 実際に数学の議論に適用する場合は , 選択公理と同等の使いやすい主

^{*1} 当たり前に感じられるので , 無意識に「選択公理」を使っている場合も多い . これからの議論の中でも自然な場合は言及せずに使う . ある程度「選択公理」を使った議論に慣れてから , 再度より正確な議論を行うことにする .

張がある．それがZ o r nの補題と整列可能性定理である．

今学期の後半には濃度の概念を学ぶ．濃度は集合の大きさのことである．無限集合にも大きさがある． $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ なる包含関係があるが，ここでいう大きさは単なる包含関係を意味するものではない． $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ はすべて同じ濃度を持つが， $\mathbb{R}$ はそれよりも真に大きな濃度を持つことを学ぶ．

11 整列集合

定義 88 (整列順序) 順序集合 $(X, <)$ が整列集合 (あるいは整列順序集合) であるとは, 空でない任意の $A \subset X$ の中に (A) の最小元が存在することである.

注意 89 整列集合は全順序集合である. 全順序集合であることは, 2 元集合 $A = \{x, y\}$ に必ず最小元が存在することからわかる.

- 例 90
1. $(\mathbb{N}, <)$ は整列集合である.
 2. $(\mathbb{Z}, <)$ は (全順序集合であるが) 整列集合でない.
 3. 有限の全順序集合は整列集合になる.

関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow X$ は X の元からなる無限列と考えられる. 無限列は $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ などで表す.

定義 91 $(X, <)$ を順序集合とする. X の元の無限列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が無限降下列であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$a_{n+1} < a_n$$

が成立することである.

- 例 92
1. $\mathbb{Z}$ における数列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_n = -n$ で定めると, 無限降下列である.
 2. $\mathbb{N}$ の中には無限降下列は存在しない.

定理 93 $(X, <)$ を順序集合とする. このとき次は同値である:

1. $(X, <)$ は整列集合である;
2. $(X, <)$ は全順序集合で, なおかつ無限降下列を持たない.

証明: $1 \Rightarrow 2$: $(X, <)$ を整列集合とする. 全順序集合になることは既に調べた. X の中に無限降下列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が存在したとしよう. このとき, 集合 $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ は最小元を持たない. これは X が整列集合であることに反する.

$2 \Rightarrow 1$: 2 を仮定する. 空でない $A \subset X$ を任意にとる. A に最小元が存在することを示そう. $a_0 \in A$ を選ぶ. これが A の最小元ならば議論は終了する. そうでなければ, $a_1 \in A$, $a_1 < a_0$ が存在する. a_1 が最小元ならば議論は終了するので, 再び $a_2 \in A$,

$a_2 < a_1$ が存在する. 以下同様に A の元 a_n を

$$a_0 > a_1 > a_2 > \cdots a_{n-1} > a_n$$

となるように選ぶ. A は無限降下列を持たないので, この構成はいつか止まる. すなわち, ある n に対して $a_n \in A$ が最小元になる.

定義 94 (辞書式順序) $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$ を順序集合とする. 直積集合 $X \times Y$ 上に $<$ を

$$(a, b) < (a', b')$$

$$\iff (a <_X a') \text{ or } (a = a' \text{ and } b <_Y b')$$

で定義する. $<$ は $X \times Y$ 上の順序になる. この順序を辞書式順序という.

注意 95 辞書に並んでいる単語の順番が辞書式順序. 長さ 2 の単語を考える. 例えば an, at, up がどの順番で出てくるか考えよう. 最初の文字で比較すると, an と at が up より先に出てこなければならないのがわかる. an と at は両方とも a で始まるので, 2 番目の n と t で比較すると, an の次に at が出るのがわかる.

定理 96 $(X, <_X)$, $(Y, <_Y)$ がともに整列集合のとき, 順序集合 $(X \times Y, <)$ は整列集合になる. ただし, 順序 $<$ は辞書式順序とする.

証明: $A \subset X \times Y$ を空でない集合とする. A の第一成分の集合を X_A とする. $X_A \subset X$ の最小元が存在する. それを $a \in X_A$ とする. 次に第一成分が a となる元の第 2 成分を集めて Y_A とする. すなわち,

$$Y_A = \{y \in Y : (a, y) \in A\}.$$

Y_A にも最小元が存在する. それを b とする. このとき $(a, b) \in A$ が A の最小元となる.

演習問題 97

1. $(\mathbb{Q}, <)$ は整列集合でないことを示せ.

2. $\mathbb{R}$ の部分集合 $A = \{1 - 1/n : n = 1, 2, \dots\} \cup \{2 - 1/n : n = 1, 2, \dots\}$ を考える. $(A, <)$ は整列集合になることを示せ (ただし $<$ は $\mathbb{R}$ の自然な順序を A に制限したものである).

3. 同様に $B = \{1/n : n = 1, 2, \dots\}$ を考える. $(B, <)$ は整列順序集合でないことを示せ.

4. $C = \{m - 1/n : m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots\}$ は整列集合になるか？
5. 整列集合の空でない部分集合は整列集合になることを示せ．

演習問題 98 次の順序集合の中で無限降下列を持つものはどれか．

$$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}.$$

演習問題 99 $(X, <)$ を全順序集合とする．

1. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ が X の無限降下列のとき，集合 $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ には最小元がないことを示せ．
2. 空でない集合 $A \subset X$ に最小元がないとする．このとき， A の中に無限降下列が存在することを示せ．

演習問題 100 辞書式順序が順序になることを示せ．

演習問題 101 英語のアルファベットの集合 X にアルファベット順の順序を入れる ($a < b < c < \dots < z$). X^2 に辞書式順序を入れたとき，次の単語間の順序を決定せよ．

$$ab, ba, aa, ac, bb.$$

演習問題 102 X を上と同じくアルファベットの集合とする． X の有限列の全体を X^* とかく (英単語は X^* の元と考えられる)． η が ν を延長した単語のときに $\nu < \eta$ と定義する (例えば $an < and$ である)．次を示せ．

1. X^* は全順序集合でない．
2. X^* は無限降下列を持たない．
3. $A \subset X^*$ が無限集合で下に閉じているとき， A は無限上昇列を持つ．(A が下に閉じているとは，「 $\nu < \eta \in A \Rightarrow \nu \in A$ 」となることである)．

演習問題 103 次の各直積集合に辞書式順序を入れて考える．整列集合であるか否かを判断せよ．

1. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$
2. $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$
3. $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}$

演習問題 104 $(X, <_X), (Y, <_Y)$ を順序集合とする．

1. $(X, <_X)$ が整列でないならば， $(X \times Y, <)$ も整列にならないことを示せ．
2. $(Y, <_Y)$ が整列でないならば， $(X \times Y, <)$ も整列にならないことを示せ．
3. $(X, <_X), (Y, <_Y)$ がともに全順序集合ならば， $(X \times Y, <)$ も全順序集合になることを示せ．

全順序集合 $(X, <)$ と $a \in X$ に対して， $I(a) = \{b \in X : b < a\}$ とおく． $I(a)$ は a より小さい元全体の集合である．もし a が X の最小元ならば $I(a) = \emptyset$ である．

演習問題 105 1. $a < b$ ならば $I(a) \subsetneq I(b)$ となることを示せ．

2. $I(a) \subsetneq I(b)$ ならば $a < b$ であることを示せ．

3. $(X, <)$ が全順序集合でないとき，2 番は必ずしも成り立たないことを示せ．

演習問題 106 $(X, <)$ を整列集合とする． $Y = \{I(a) : a \in X\}$ に対して，包含関係で順序を入れる (包含関係で小さい集合は順序でも小さいと考える)．このとき， Y は整列集合となることを示せ．

演習問題 107 空でない 3 つの順序集合 X, Y, Z がある．直積集合 $X \times Y \times Z$ に対して，次の 2 つの順序を考える．

- $X \times Y \times Z = (X \times Y) \times Z$ と考えて，最初に $X \times Y$ に辞書式順序を与えて，次にこれと Z の直積に辞書式順序を与える．
- $X \times Y \times Z = X \times (Y \times Z)$ と考えて， X と「辞書式順序を与えた $Y \times Z$ 」の直積集合に辞書式順序を与える．

これらは同じ順序になるか否かを述べよ．

12 超限帰納法

$(\mathbb{N}, <)$ は整列集合の代表例である．整列集合は $\mathbb{N}$ に似ている．これを示す一つの例が次の定理 108 である．

順序集合 $(X, <)$ とその元 $a \in X$ に対して， a 未満の元全体を $I(a)$ とかく．すなわち，

$$I(a) = \{x \in X : x < a\}.$$

定理 108 (超限帰納法) $(X, <)$ を整列集合とし， $S \subset X$ とする．いま $\forall a \in X$ に対して

$$(*) I(a) \subset S \Rightarrow a \in S$$

が成立すれば，実は $S = X$ である．

証明： $X \setminus S$ が空でないとする．このとき， $X \setminus S$ の最小元 a が存在する．最小性から $I(a) \subset S$ が成り立つ．したがって，仮定 $(*)$ から $a \in S$ となり，矛盾を得る．

注意 109 $\mathbb{N}$ は整列である． $\mathbb{N}$ の場合に超限帰納法が何を主張しているのか考えてみる． $a = 0$ に対して，条件 $(*)$ を考えると， $I(0) = \emptyset \subset S$ だから，

$$\bullet 0 \in S$$

を主張している．また $a = n + 1$ に対する条件 $(*)$ を考えると，

$$\bullet n \text{ 以下のすべての数が } S \text{ に属する} \Rightarrow n+1 \in S$$

を主張していることになる．この二つの条件のもとに $S = \mathbb{N}$ が出てくると定理は言っている．すなわち， $\mathbb{N}$ の場合の超限帰納法は通常の帰納法に他ならない．

命題 110 $(X, <)$ を整列集合として，関数 $\sigma : X \rightarrow X$ を順序同型^{*2}とする．このとき， σ は $\forall x \in X$ に対して $\sigma(x) = x$ (恒等写像) を満たす．

証明： $S = \{x \in X : \sigma(x) = x\}$ とする． $S = X$ を

^{*2} $(X, <_X), (Y, <_Y)$ を順序集合とするとき，関数 $\sigma : X \rightarrow Y$ が順序同型であるとは，(1) σ が全単射，(2) $\forall x, y \in X, x <_X y \iff \sigma(x) <_Y \sigma(y)$ が成立することである．また，このような σ が存在するとき， $(X, <_X)$ と $(Y, <_Y)$ が順序同型であるともいう．

超限帰納法で示せばよい． $a \in X$ に対して $I(a) \subset S$ を仮定する．このとき，次の 3 通りが考えられる：

$$\sigma(a) < a, \sigma(a) = a, \sigma(a) > a.$$

σ の単射性から， $\sigma(a) < a$ となることはない． $\sigma(a) > a$ のときは， $\sigma^{-1}(a)$ の場所がなくなってしまう．よって $\sigma(a) = a$ となり， $a \in S$ を得る．超限帰納法の示すべき条件 $(*)$ が示されたので， $S = X$ を得る．

命題 111 $(X, <_X)$ と $(Y, <_Y)$ を整列集合とする．このとき，次のいずれかが成立する．また同時に 2 つが成立することはない．

1. $(X, <_X)$ と $(Y, <_Y)$ は順序同型である．
2. $(X, <_X)$ はある $I_Y(b) = \{y \in Y : y <_Y b\}$ と順序同型である．
3. $(Y, <_Y)$ はある $I_X(a) = \{x \in X : x <_X a\}$ と順序同型である．

証明： 2, 3 のいずれも成立しないと仮定して，1 が成立することを示す． $S \subset X$ を次が成立する $a \in X$ の全体とする：

$$\bullet I_X(a) \cup \{a\} \cong I_Y(b) \cup \{b\} \quad (\exists b \in Y). \\ (a \text{ 以下と } b \text{ 以下が順序同型ということ})$$

ただし， $\cong$ は順序同型の意味である．

主張 A $S = X$.

超限帰納法を用いる．このために， $I_X(a) \subset S$ とする．各 $d <_X a$ に対して，

$$\sigma_d : I_X(d) \cup \{d\} \rightarrow I_Y(e) \cup \{e\}$$

となる同型写像 σ_d と $e \in Y$ が存在する．さらに， $d <_X d'$ ならば $\sigma_{d'}$ は σ_d の拡大になっている (演習問題)．したがって， $\sigma_0 = \bigcup_{d <_X a} \sigma_d$ とすれば， σ_0 は $I_X(a)$ を定義域とする順序同型になる．値域が Y 全体ならば，3 番が成立してしまう．よって値域は $I_Y(b)$ の形であり， $\sigma_a = \sigma_0 \cup \{(a, b)\}$ は $I_X(a) \cup \{a\} \cong I_Y(b) \cup \{b\}$ なる順序同型を与える．よって $a \in S$ となる．

主張 B $(X, <_X) \cong (Y, <_Y)$.

$S = X$ なので，各 $a \in X$ に対して，上記の σ_a が存

在する． $\sigma = \bigcup_{a \in X} \sigma_a$ は X を定義域とする順序同型であるが，値域は Y 全体でなければ， $I_Y(b)$ の形となり，2 番が成立してしまう．したがって値域は Y 全体となり，1 番が成立する．(同時に 2 つが成立しないことは演習問題とする．演習 114 参照．)

演習問題 112 $(X, <_X) \cong (Y, <_Y)$ のとき， $(X, <_X)$ が整列集合ならば $(Y, <_Y)$ も整列集合になることを示せ．

演習問題 113 $(X, <)$ を全順序集合とする．

1. $I \subsetneq X$ が X の (真の) 始切片であるとは， $x \in I, y < x$ のとき常に $y \in I$ となることである． $a \in X$ に対して， $I(a)$ の形の集合は X の始切片となることを示せ．
2. $\mathbb{Q}$ においては， $I(a)$ の形でない始切片が存在することを示せ．
3. $(X, <)$ が整列集合のとき，始切片は必ず $I(a)$ の形になることを示せ．

演習問題 114 $(X, <_X)$ を整列集合とする． $(X, <_X)$ と順序同型になる $I(a)$ ($a \in X$) は存在しないことを示せ．(ヒント：背理法を用いよ． $a \in X$ の存在から無限降下列を作る．)

演習問題 115 $(X, <_X)$ と $(Y, <_Y)$ を整列集合とする． $a_1, a_2 \in X, b_1, b_2 \in Y$ として，

$$\sigma_i : I_X(a_i) \rightarrow I_Y(b_i)$$

を順序同型とする ($i = 1, 2$)．このとき， $a_1 <_X a_2$ ならば， $b_1 <_Y b_2$ であり， $\sigma_1 \subset \sigma_2$ となる^{*3}ことを示せ．

演習問題 116 $(X, <)$ を全順序集合とする．

1. I, J が始切片のとき， $I \subset J$ または $J \subset I$ が成立することを示せ．
2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して， I_n は X の始切片で， $(I_n, <)$ は整列集合になっているとする．また $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ とする．このとき， $(X, <)$ も整列になることを示せ．

演習問題 117 1. A, B を全順序集合とする． A の後に B をおいてできる全順序集合を $A + B$ とかくことにする． A, B がともに整列集合ならば $A + B$ も整列集合となることを示せ．
2. A を整列集合とする．このとき， A は $A_0 + B$ の形に表せる．ただし， A_0 は最大元のない整列集合で， B は有限全順序集合である．

^{*3} 関数は集合として定義しているので， $\sigma_1 \subset \sigma_2$ なる記法は意味を持つ．通常書き方では，「 $\text{dom} \sigma_1 \subset \text{dom} \sigma_2$ であつて $\forall x \in \text{dom} \sigma_1$ に対して $\sigma_1(x) = \sigma_2(x)$ となる」ことである．

13 選択公理と Zorn の補題

選択公理

次の主張を選択公理という：

(*) 添え字集合 I を持つ集合族 $\{X_i : i \in I\}$ において、各 X_i が空でないとする。このとき、 I を定義域とする関数 f で、 $\forall i \in I$ に対して、

$$f(i) \in X_i$$

となるものが存在する。

このような f は直積集合 $\prod_{i \in I} X_i$ の元であるから、選択公理を別の言い方で表現すると、次のようになる：

(**) 添え字集合 I を持つ集合族 $\{X_i : i \in I\}$ において、各 X_i が空でないとする。このとき直積集合 $\prod_{i \in I} X_i$ は空でない。

注意 118 上の f を選択関数とよぶことがある。選択公理は大抵の人にとっては、ごく当たり前の主張である。以下では選択公理を認めて議論をしてゆく。選択関数は多くの集合たちの中から一つずつ元をとるとき、そのとり方を具体的に示しているわけではない。したがって、 f はある意味超越的な関数である。選択公理を認めることはこのような超越的選択が可能であることを認めることになる。

例 119 $\mathbb{N}$ の部分集合の族 $\{X_n : n \in \mathbb{N}\}$ を $X_n = \{n, n+1, \dots, 2n\}$ で定義する。このとき、 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(n) = n$ で定義すれば、 f はこの集合族の選択関数である。集合族が具体的に与えられるときは、選択関数も具体的にとれることがある。そのときは、選択公理は必要とされない。しかし具体的でない集合族に対しても、選択関数が存在することを主張するのが選択公理である。

命題 120 $X \neq \emptyset$ とする。 $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ を定義域とする関数 f で、空でない $A \subset X$ に対して、 $f(A) \in A$ となるものが存在する。

証明： 添え字集合を $I = \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ として、集合族を $X_A = A$ ($A \in I$) で定義する。この集合族に対して、選択公理を適用すればよい。

Zorn の補題

$(X, <)$ を順序集合とする。 $C \subset X$ が鎖 (chain) であるとは、 C が全順序部分集合となることである (空集合も鎖としておく)。すなわち、 C が鎖であるとは、任意の $a, b \in C$ に対して、 $a < b$, $a = b$ または $b < a$ の何れかが成立することである。

例 121 1. 順序集合 $(X, <)$ の 1 点からなる部分集合 $\{a\}$ は鎖である。

2. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を包含関係で順序集合とみる。 $C = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \dots, \{0, 1, \dots, n\}, \dots\}$ は X の鎖である。また $\mathbb{N} \in X$ は C の上界である。順序集合 $Y = X \setminus \{\mathbb{N}\}$ で C を考えると、 C は鎖であるが、上界を持たない。

定理 122 (Zorn の補題) $(X, <)$ を順序集合とする。また X の鎖には必ず上界が存在すると仮定する。このとき、 X には極大元が存在する。

証明： (直感的証明) $x_0 \in X$ を任意にとる。 x_0 が極大元ならば終わり。そうでなければ $x_0 < x_1$ なる $x_1 \in X$ がとれる。 x_1 が極大元ならば終わり。そうでなければ $x_0 < x_1 < x_2$ なる $x_2 \in X$ がとれる。この操作を繰り返してゆき、どの時点でも極大元が現れなければ、

$$x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$$

なる X の (無限) 鎖がとれる。仮定から、この鎖の上界 $a \in X$ が存在する。 a を上の x_0 だと思って、同じ議論を繰り返す。 X の大きさは限られているので、いつかは極大元にゆきあたるはず。(この最後の部分が少し怪しい)

演習問題 123 1. 集合族 $\{X_1, X_2\}$ において、 X_1, X_2 はともに有限集合で、 X_1 は 3 個、 X_2 は 4 個の元を持つ。この集合族に対する選択関数は何種類あるか。

2. $\mathfrak{X} = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\emptyset\}$ を集合族とみる。 $\mathfrak{X}$ において、関数 f を $f(A) = \min A$ で定めるとき、 f が $\mathfrak{X}$ に対する選択関数になることを示せ。

3. $\mathbb{R}$ の有界な部分集合全体を $\{X_i : i \in I\}$ とする。関数 f を $f(i) = \inf X_i$ で定義するとき、 f は $\{X_i : i \in I\}$ に対する選択関数となるか？

演習問題 124 $X = \mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ を包含関係で順序集合とみるとき, 次の C が X の鎖であるかどうか判断せよ.

1. $C = \{\emptyset\}$,
2. $C = \{\{0, 1, 2\}\}$,
3. $C = \{\emptyset, \{1\}\}$,
4. $C = \{\{0, 1\}, \{0, 2\}\}$.

演習問題 125 $C, D \subset X$ が順序集合 $(X, <)$ の鎖だとする. このとき,

1. $C \cap D$ も鎖になることを示せ.
2. $C \cup D$ は必ずしも鎖にならない. そのような例を与えよ.

演習問題 126 1. $(\mathbb{N}, <)$ においては, すべての部分集合が鎖となることを示せ.

2. $\mathbb{N} - \{0\}$ に対して, $m \preceq n$ を「 m は n を割り切る」で定義する. このとき, 無限鎖の例をあげよ.
3. $X = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ を包含関係で順序集合とみる. 極大な鎖の例をあげよ. また極大な鎖はいくつあるか.
4. $(X, <)$ を順序集合とする. $C_0 \subset C_1 \subset \dots$ が X の鎖の上昇列のとき, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$ も X の鎖となることを示せ.

演習問題 127 $f: X^2 \rightarrow X$ とする. $A \subset X$ が関数 f で閉じているとは, $a, b \in A \Rightarrow f(a, b) \in A$ が常に成立することとする.

1. $A_n \subset X$ ($n \in \mathbb{N}$) がすべて f で閉じているならば, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ も f で閉じていることを示せ.
2. $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ は f で閉じているといえるか.
3. $A_0 \subset A_1 \subset \dots$ の条件があるときはどうか.

演習問題 128 次の各順序集合は Zorn の補題の仮定部分の条件 (鎖が必ず上界を持つ) を満たすか.

1. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ を包含関係で順序集合と見る.
2. $X = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \{\mathbb{N}\}$ を包含関係で順序集合と見る.
3. X を $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体として, 包含関係で順序を入れる.
4. X を $\mathbb{R}$ の有界な部分集合全体として, 包含関係で順序を入れる.

5. V を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間として, X を V の一次独立な部分集合全体とする. X を包含関係で順序集合と見る.

14 Zorn の補題の証明

Zorn の補題 (再掲): $(X, <)$ を順序集合とする .
また X の鎖には必ず上界が存在すると仮定する .
このとき , X には極大元が存在する .

Zorn の補題の直感的な証明はすでに与えた . より
厳密な議論は選択公理を使うことにより得られる .
そのために , 一見すると Zorn の補題よりも弱く感じ
られる次の命題を示すことにする .

命題 129 $\emptyset \neq \mathfrak{X} \subset \mathcal{P}(X)$ とする . $\mathfrak{X}$ を包含関係で
順序集合と考える . さらに

- $A \subset B \in \mathfrak{X} \Rightarrow A \in \mathfrak{X}$
- $\mathcal{C}$ が $\mathfrak{X}$ の鎖 $\Rightarrow \bigcup \mathcal{C} \in \mathfrak{X}$

を仮定する . このとき , $\mathfrak{X}$ には極大元が存在する .

証明: 背理法で示す . $\mathfrak{X}$ に極大元が存在しないとし
て矛盾を導こう . 極大元がないことから , 各 $A \in \mathfrak{X}$
に対して ,

$$\mathfrak{X}_A = \{B \in \mathfrak{X} : A \subsetneq B, B \setminus A \text{ は 1 点}\}$$

は空でない . 集合族 $\{\mathfrak{X}_A : A \in \mathfrak{X}\}$ に選択公理を用
いることにより , 関数 $f : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ で , 各 $A \in \mathfrak{X}$ に対
して ,

- $f(A) \setminus A$ は 1 点で ,
- $A \subsetneq f(A) \in \mathfrak{X}$

となるものが存在する . $\mathfrak{X}$ の部分集合 $\mathcal{T}$ で次を満た
すものを考える :

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. $A \in \mathcal{T} \Rightarrow f(A) \in \mathcal{T}$ (f で閉じている);
3. $\mathcal{D}$ が $\mathcal{T}$ の鎖 $\Rightarrow \bigcup \mathcal{D} \in \mathcal{T}$.

$\mathfrak{X}$ 自身は上の条件を満たす . したがって , 上の条件
を満たす $\mathcal{T}$ の中で一番小さな $\mathcal{T}_0$ が存在する (上の
条件を満たす $\mathcal{T}$ たちの共通部分をとればよい)

次に $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}_0$ を $\mathcal{T}_0$ のどの元とも包含関係を比較可
能な $\mathcal{T}_0$ の元全体とする . 例えば $\emptyset$ は $\mathcal{C}$ に属する .

主張 A $C \in \mathcal{C}$ のとき , $\mathcal{T}_0 = \{A \in \mathcal{T}_0 : A \subset C\} \cup$
 $\{A \in \mathcal{T}_0 : f(C) \subset A\}$.

$\therefore$) 右辺が上の 3 条件を満たすことを言えばよい . 条
件 1,3 は明らかである . 条件 2 を示すのに , $C \in \mathcal{C}$
と f が 1 点しか増やさないことを用いる . 詳細は演
習問題 .

主張 B $\mathcal{C}$ は f で閉じている .

$\therefore$) $C \in \mathcal{C}$ とする . $f(C) \in \mathcal{C}$ を言うためには , A
を $\mathcal{T}_0$ に属する任意の集合として , A が $f(C)$ と比
較できることを言えばよい . 主張 A から , $A \subset C$ ま
たは $f(C) \subset A$ のどちらかが成立する . 後者なら
ば , 何も議論する必要がない . 前者ならば , もちろん
 $A \subset f(C)$ である . したがって , A と $f(C)$ は比較で
きる .

主張 C $\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}$. 特に $\mathcal{T}_0$ は鎖である .

$\therefore$) $\mathcal{C}$ が条件 1 - 3 を満たすことを示せば , $\mathcal{T}_0$ の最小
性から $\mathcal{T}_0 = \mathcal{C}$ を得る . 条件 1 , 2 については既
に示してある . 3 を示す . $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ を鎖とする . $A \in \mathcal{T}_0$ を
任意に与えるとき , $\bigcup \mathcal{D}$ と A が包含関係を比較で
きることを示せばよい .

場合 1 . $D \in \mathcal{D}$ で $A \subset D$ となるものが存在する
とき , $A \subset \bigcup \mathcal{D}$ なので , A と比較可能 .

場合 2 . 任意 $D \in \mathcal{D}$ が $D \subset A$ となるとき .
 $\bigcup \mathcal{D} \subset A$ なので , 再び A と比較可能 .

主張 C と条件 3 から $\bigcup \mathcal{T}_0 \in \mathcal{T}_0$ となり , これは
 $\mathcal{T}_0$ の最大元でなければならない . しかし条件 2 から
 $f(\bigcup \mathcal{T}_0) \in \mathcal{T}_0$ はさらに大きな元となり矛盾である .

Zorn の補題の厳密な証明: $(X, <)$ の鎖全体を $\mathfrak{X}$ と
して , 包含関係により順序を入れる . このとき , $\mathfrak{X}$ は
命題の条件を満足する . したがって極大元 $C \in \mathfrak{X}$ が
存在する . C は X における極大な鎖となっている .
極大性から , C の X における上界 $a \in X$ は C の
最大元となり , なおかつ X における極大元となっ
ている .

例 130 $V \neq \{\vec{0}\}$ を $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間とする . V
に基底が存在することを示す . $\mathfrak{X}$ を V で一次独立な
部分集合の全体とする . もちろん $\mathfrak{X}$ は空でない . $\mathfrak{X}$
に包含関係で順序を入れる . $\mathcal{C} \subset \mathfrak{X}$ を任意の鎖とす
れば , $\bigcup \mathcal{C}$ も一次独立な集合となる . すなわち $\mathcal{C}$ に

上界が存在する．このことは，Zorn の補題を適用するための条件が備わっていることを示す．よって， $\mathfrak{A}$ の極大元 B が存在する． B は極大な一次独立集合である．よって基底となる．

演習問題 131 $(X, <)$ を順序集合として， $C \subset X$ を極大な鎖とする． $a \in X$ が C の上界ならば， a は C の最大元になることを示せ．

演習問題 132 任意の順序集合 $(X, <)$ に極大鎖が存在することを次の順で示せ．

1. X の鎖の全体を $\mathfrak{A}$ として，包含関係で順序を入れる． $\mathfrak{A}$ の鎖とは，具体的にどんな条件を満たす集合か．
2. $\mathfrak{A}$ の鎖 C は必ず上限 $A \in \mathfrak{A}$ を持つことを示せ．
3. Zorn の補題により， $\mathfrak{A}$ に極大元 M が存在することを示せ．
4. 極大元 $M \in \mathfrak{A}$ は， X においては極大鎖になっていることを示せ．

演習問題 133 $(X, <)$ を順序集合とする．次を示せ．

1. X は極大な全順序部分集合を持つ（上の演習問題を参照）．
2. X は必ずしも極大な整列部分集合を持たない．
ヒント： X を負の整数全体とする． X の整列部分集合は有限集合になる．

演習問題 134 * R を 1 を持つ環とする ($0 \neq 1$ を仮定する)． R は極大イデアルを持つことを示せ．ヒント： X を R のイデアル $I \subsetneq R$ の全体とする． X が Zorn の補題適用のための条件を満たすことを示す．

演習問題 135 $F = \{X_i : i \in I\}$ を集合族とする．定義域 J が I の部分集合で， $f(j) \in A_j$ ($\forall j \in J$) なる関数 f を F の部分選択関数とよぶことにする．部分選択関数の全体を C とおく．

1. $f, g \in C$ に対して， $f < g \iff$ 「 $\text{dom}(f) \subsetneq \text{dom}(g)$ かつ $\forall i \in \text{dom}(f), f(i) = g(i)$ 」とする． $<$ は順序となることを示せ．
2. $(C, <)$ は Zorn の補題の仮定部分を満たすことを示せ．
3. $(C, <)$ の極大元は， F の選択関数になること

を示せ．

4. 以上から，Zorn の補題を認めれば，選択公理が導かれることを説明せよ．

15 選択公理と整列可能性定理

帰納法が非常に有用な証明方法であることはよく知られている。超限帰納法は帰納法の拡張のようなものだから有用な証明方法であることは想像できる。しかし、整列集合でなければ適用できない。次の定理はどんな集合も整列集合にできることを主張する。

定理 136 (整列可能性定理) $X \neq \emptyset$ を任意の集合とする。このとき、 X 上の順序 $<$ で、 $(X, <)$ が整列集合となるものが存在する。

証明：

$\mathfrak{X} = \{(A, <_A) : A \subset X, <_A \text{ は } A \text{ 上の整列順序}\}$ とする。 X の 1 元集合は整列集合にできるから、 $\mathfrak{X}$ は空でない。 $\mathfrak{X}$ 上に 2 項関係 $\prec^*$ を

$$(A, <_A) \prec^* (B, <_B) \iff A \text{ は } B \text{ の真の始切片}$$

で定義する。 $\prec^*$ は $\mathfrak{X}$ 上の順序となる。

$$C = \{(A_i, <_i) : i \in I\} \subset \mathfrak{X}$$

を $\prec^*$ に関する任意の鎖とする。このとき、 $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ 上に 2 項関係 $<_A$ を

$$a <_A b \iff \exists i \in I (a, b \in A_i, a <_i b)$$

で定義すると $<_A$ は順序になる。さらに $(A, <_A)$ が整列集合になることも容易にわかる。したがって、次が示された。

主張 A C は上界を持つ。

このことは、 $(\mathfrak{X}, \prec^*)$ が Zorn の補題の仮定部分の条件を満たすことを示す。したがって、 $\mathfrak{X}$ は極大元 $(M, <)$ を持つ。次を示せば証明が終了する。

主張 B $M = X$ である。

そうでないとすれば、 $a \in X \setminus M$ がとれる。 $M \cup \{a\}$ における順序を M の部分は $<$ のままで、 a を M の後ろに付け加えた整列順序とする。このとき $M \cup \{a\}$ は M より大きな整列順序となり、 M の極大性に反する。

注意 137 (まとめ) 次の 3 つは同等である。すなわち、一つを認めれば他は導びかれる。

1. 選択公理
2. Zorn の補題
3. 整列可能性定理

証明： $1 \Rightarrow 2$: 選択公理を用いて、Zorn の補題を導いた (定理 122)。

$2 \Rightarrow 3$: Zorn の補題を用いて、整列可能性定理を導いた (定理 136)。

$3 \Rightarrow 1$: 以下の演習問題 139。

演習問題 138 復習。

1. 超限帰納法を正確に述べよ。
2. 整列な順序集合と整列でない順序集合の例をあげよ。
3. 自然数上の超限帰納法は帰納法に他ならないことを説明せよ。(正確には累積帰納法 (course-of-values induction))
4. 始切片の定義を述べよ。

演習問題 139 1. $(X, <)$ を整列順序とする。空でない $A \subset X$ に対して、 $\min A$ を対応させる関数を f とおくと、 f は $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ に対する選択関数となることを示せ。

2. このことから、整列可能性定理を認めれば、選択公理が導かれることを説明せよ。

演習問題 140 $(X, <)$ を順序集合とする。 $I_0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \dots$ を X の部分集合の上昇列で

1. $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$;
2. 各 $(I_n, <)$ は整列集合

を満たすとする。このとき、 $(X, <)$ は必ず整列集合になるか。

演習問題 141 1. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ に自然な順序を与える。 $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Z}$ は順序同型にならないことを示せ。

2. $\mathbb{N}$ と $2\mathbb{N}$ (偶数全体) は順序同型になることを示せ。

3. $\mathbb{N}$ と $\mathbb{Q}$ は順序同型にならないことを示せ。

4. $f : X \rightarrow Y$ が順序同型写像ならば、 $f^{-1} : Y \rightarrow X$ も順序同型写像となることを示せ。

5. $(\mathbb{N}, <)$ から $(\mathbb{N}, <)$ への順序同型写像は恒等写像に限ることを示せ。

6. $(\mathbb{Q}, <)$ から $(\mathbb{Q}, <)$ への順序同型写像で恒等

写像でない例を与えよ .

7. X, Y が整列のとき , 順序同型写像 $f : X \rightarrow Y$ は高々 1 つしかないことを示せ .
8. $(X, <_X) \preceq^* (Y, <_Y) \iff Y$ の始切片 I で X と同型なものが存在する , として $\preceq^*$ を定義する . X, Y がともに整列のとき , $(X, <_X) \preceq^* (Y, <_Y)$ または $(Y, <_Y) \preceq^* (X, <_X)$ となることを示せ .

16 ベルンシュタインの定理

二つの集合 X, Y の間の大きさの大小関係をどのようにとらえたらよいだろう． $f: X \rightarrow Y$ なる単射が存在するとき， X が Y の中に埋め込まれているから X の方が Y より（等しい場合も含めて）小さいと考えるのは妥当であろう．そこで，

$$X \preceq Y \iff \exists f: X \rightarrow Y \text{ 単射}$$

と定義する．これが擬順序の条件を満たすことは見やすい．では，二つの集合の大きさが同じというのはどうしたらよいだろう．

$$X \sim Y \iff \exists f: X \rightarrow Y \text{ 全単射}$$

が妥当であろう． $X \sim Y$ のとき X と Y は対等という．それでは， $X \preceq Y \preceq X$ から $X \sim Y$ が出てくるのだろうか．実はこれが正しいことがわかる．それを主張するのがベルンシュタイン（Bernstein）の定理である．

- 例 142
1. $\{0, 1\} \preceq \{2, 3, 4\}$,
 2. $\{0, 1, \dots, n-1\} \sim \{n, n+1, \dots, 2n-1\}$,
 3. $\mathbb{N} \preceq \mathbb{Z}$,
 4. $\mathbb{Z} \preceq \mathbb{N}$.

定理 143（ベルンシュタインの定理）

$$X \preceq Y \preceq X \Rightarrow X \sim Y.$$

証明： $X \preceq Y \preceq X$ の仮定のもとで， X と Y の間の全単射を定義してゆく．

（Step 1） $X \supset Y$ のとき： $X \preceq Y$ により単射 $f: X \rightarrow Y$ が存在する． $X_0 = X \setminus Y$ とおき，正の自然数 $n = 1, 2, \dots$ に対して，

$$X_n = f^n(X_0) = \underbrace{f(f(\dots f(X_0)\dots))}_n$$

と定義する． $X_n \subset Y$ である．また f の単射性から， $n \neq m$ に対して， $X_n \cap X_m = \emptyset$ が示される． $Y_0 = Y \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ として，次の関数を定義する．

$$g(a) = \begin{cases} a & a \in Y_0 \\ f(a) & a \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \end{cases}$$

このとき， g も単射で，さらに g は X と $Y = Y_0 \cup \bigcup_{n > 0} X_n$ の間の全単射を与える．

（Step 2）一般の場合： Y を X の中に埋め込む単射 h がすでにあるので， $h(Y)$ と X の間の全単射を作ればよい．しかし，この場合はすでに（Step 1）で終わっている．

注意 144 ベルンシュタインの定理は，「Bernstein-Schröder の定理」「Cantor-Bernstein-Schröder の定理」などと呼ばれることがある．

可算集合

有限集合，無限集合の概念は定義するまでもなく自然に理解していると思うが，より厳密な議論のために，この講義では $\mathbb{N} \preceq X$ なる集合 X を無限集合とよぶことにする．また，適当な自然数 n に対して $\{0, 1, \dots, n\}$ と対等になる集合を有限集合とよぶ．

定義 145 $X \preceq \mathbb{N}$ なる集合を可算集合とよぶ．特に $X \sim \mathbb{N}$ のときに，可算無限集合という．可算でない無限集合を非可算集合という．

- 注意 146
1. 可算無限集合のことを単に可算集合とよぶ流儀もあるので注意を要する．
 2. 無限の可算集合と可算無限集合とは本来は別の定義である．しかし集合 X が無限 ($\mathbb{N} \preceq X$) でかつ可算 ($X \preceq \mathbb{N}$) のとき，ベルンシュタインの定理により，可算無限集合 ($X \sim \mathbb{N}$) となる．

定理 147 X, Y を可算集合とする．

1. $X \cup Y$ は可算集合である．
2. 直積集合 $X \times Y$ も可算集合である．
3. $\{X_i : i \in \mathbb{N}\}$ を可算集合からなる集合族とする．このとき $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ も可算集合である．

証明： 1. X, Y が可算集合なので，単射 $f: X \rightarrow \mathbb{N}$ および $g: Y \rightarrow \mathbb{N}$ がとれる． $h: X \cup Y \rightarrow \mathbb{N}$ を $h(x) = 2f(x)$ ($x \in X$)， $h(x) = 2g(x) + 1$ ($x \in Y \setminus X$) で定義すれば，単射となる．

2. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ が可算（無限）集合になることを示せばよい． $f: \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(x) = 2^x \cdot 3^y$ で定義すれば，素因数分解の一意性により， f は単射になる．

3. 簡単のために， X_i たちは互いに共通部分がないと仮定する．各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，単射 $g_i: X_i \rightarrow \mathbb{N}$

をとる .

$$f : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

を , $x \in X_i$ のとき $f(x) = (i, g_i(x))$ で定義する . f は単射になる . 2 により , 単射 $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ があるので , 合成関数 $h \circ f : \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i \rightarrow \mathbb{N}$ は単射になる .

演習問題 148 1. $X \preceq X$ を示せ .

2. $X \preceq Y \preceq Z \Rightarrow X \preceq Z$ を示せ .

3. $2\mathbb{Z} \preceq \mathbb{Z}$ となることを示せ .

演習問題 149 次を示せ .

1. $\{0, 1, 2, 3\}$ は有限な可算集合である .

2. $\mathbb{N}$ は可算無限集合である .

3. $\mathbb{Z}$ は可算無限集合である .

4. $2\mathbb{Z}$ は可算無限集合である .

5. X が可算集合ならば , その部分集合も可算集合である .

演習問題 150 任意の集合 X, Y に対して , $X \preceq Y$ または $Y \preceq X$ となることを示せ . (ヒント : X の部分集合から Y の部分集合への全単射を部分全単射と一時的によぶことにする . 部分全単射の全体を $\mathfrak{X}$ とかく . $\mathfrak{X}$ に対して , (関数を集合と考えた上で) 包含関係により順序を入れる . これに対して Zorn の補題を適用する .)

演習問題 151 1. $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(x) = 3^x \cdot 5^y$ で定義する . f が単射になることを示せ .

2. $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$ を $f(x, y) = \frac{1}{2}(x+y+1)(x+y)+x$ で定義するとき , これは全単射になることを示せ . (注 . $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$)

3. $\mathbb{Q}$ が可算集合であることを示せ .

4. $\mathbb{Z}^2$ が可算集合であることを示せ .

5. X が可算集合のとき X の元の有限列全体 Y は可算集合である .

6. x を変数とする $\mathbb{Q}$ 係数多項式 $f(x)$ の全体は可算集合である .

演習問題 152 X を非可算集合とする . $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ と分割するとき , いずれかの A_n は非可算集合となることを示せ .

17 対角線論法

非可算集合の存在

定義 153 1. (再掲)

$$X \preceq Y \iff \exists f: X \rightarrow Y \text{ 単射,}$$

$$X \sim Y \iff \exists f: X \rightarrow Y \text{ 全単射.}$$

2. $X \preceq Y$ のとき, X の濃度は Y の濃度以下であるといい, 記号 $|X| \leq |Y|$ で表す.

3. $X \sim Y$ (対等) のとき, X の濃度と Y の濃度が等しいといい, 記号 $|X| = |Y|$ で表す.

4. $X \preceq Y$ だが $Y \preceq X$ でないとき, Y の濃度は X の濃度より真に大きいといい, 記号 $|X| < |Y|$ で表す.

注意 154 X の濃度と Y の濃度が等しいとき, $|X| = |Y|$ の他に, $\text{Card } X = \text{Card } Y$, $\#X = \#Y$ などの表記をすることがある. ($\#X < \#Y$ などとも自明な意味に用いる.)

定理 155 $|X| < |\mathcal{P}(X)|$.

証明: 各点 $x \in X$ に対して, $\{x\} \in \mathcal{P}(X)$ を対応させる関数は単射である. したがって, $X \preceq \mathcal{P}(X)$ はすぐわかる.

次に $\mathcal{P}(X) \preceq X$ とならないことを示す. もし $\mathcal{P}(X) \preceq X$ とすれば, (Bernstein の定理, あるいは直接の議論で) 全射 $F: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ の存在がわかる.

$$A = \{a \in X : a \notin F(a)\}$$

なる集合を考えよう. $A \in \mathcal{P}(X)$ なので, F の全射性により, $A = F(b)$ となる $b \in X$ が存在する. このとき,

- $b \in A$ の場合: $b \in F(b)$, よって A の定義により $b \notin A$. 矛盾.
- $b \notin A$ の場合: $b \notin F(b)$, よって $b \in A$. 矛盾.

したがって, いずれにせよ, 矛盾を得る.

注意 156 1. 上の議論の仕方を対角線論法とよぶ.

2. $X = \mathbb{N}$ の場合を考えると, $\mathbb{N} < \mathcal{P}(\mathbb{N})$. すなわち, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ は非可算な無限集合になる.

3. X が有限集合のときは, より直接的な議論で $X < \mathcal{P}(X)$ がわかる.

系 157 $\mathbb{R}$ は非可算集合である.

証明: $A \subset \mathbb{N}$ に対して, その特性関数を $\chi_A: \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ とする. $f: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$f(A) = \sum_{n \in A} \frac{\chi_A(n)}{10^n}.$$

で定義する (十進展開で $n \in A$ のときだけ少数第 n 桁目を 1 にしてできる実数). f は単射になる. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ が非可算なので, それより大きい $\mathbb{R}$ も非可算である.

演習問題 158 Bernstein の定理を用いて, $|X| \leq |Y|$ かつ $|Y| \leq |X|$ のとき, $|X| = |Y|$ となることを示せ.

演習問題 159 X が有限集合のとき, $|X| < |\mathcal{P}(X)|$ を直接示せ.

演習問題 160 1. 各項が 0 または 1 からなる無限列全体の集合を X とする (例えば $(0, 0, 1, 0, \dots) \in X$). $|\mathbb{N}| < |X|$ を示せ. ヒント: X が可算集合と仮定して矛盾をだす. 可算性から, $X = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ と番号付けできる. 新たな無限列 b を, $b(n) = 1 - a_n(n)$ と定義する (ただし $b(n)$ は列 b の第 n 項). このとき, b はどの a_n とも一致しない.

2. 関数 $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ の全体からなる集合を $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ とする. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ は非可算集合となることを示せ.

3. 次の議論は正しいか. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である. また任意の実数 $r \in \mathbb{R}$ は有理数の極限としてかける. したがって, $\mathbb{R}$ も可算集合である.

注意 161 上の問題と同じ手法で, $|\mathbb{N}| < |\mathbb{R}|$ を直接的に示すこともできる.

演習問題 162 X を無限集合とする. このとき単射 $f: X \rightarrow X$ で $f(X) \subsetneq X$ となるものが存在することを以下の順で示せ.

1. 単射 $g: \mathbb{N} \rightarrow X$ を一つとる.

2. f を $X \setminus g(\mathbb{N})$ 上では恒等写像, $g(\mathbb{N})$ 上では $f(g(n)) = g(2n)$ で定義すれば, f が必要な性

質を持つ関数となる．

- 演習問題 163 1. 全単射 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ の例を一つ与えよ．ヒント：偶数 $2n$ は $(n, 0)$ に対応させ，奇数 $2n+1$ は $(n, 1)$ に対応させる．
2. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0, 1\}|$ を示せ．
3. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \{0, 1, \dots, n\}|$ を示せ． n は自然数．

- 演習問題 164 1. $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体を $\mathcal{F}$ とする． $\mathcal{F}$ は可算無限集合になることを示せ．
2. $\mathbb{N}$ の無限部分集合全体を $\mathcal{G}$ とする． $\mathcal{G}$ は非可算集合になることを示せ．

18 濃度の計算

定理 165 A が無限集合のとき,

1. $|A \cup \{a\}| = |A|$;
2. $|A \times \{0, 1\}| = |A|$;
3. $|A^2| = |A|$

証明: 1. A が無限なので, $\mathbb{N}$ が単射で埋め込まれる. 簡単のために, $\mathbb{N} \subset A$ と仮定する. また $a \notin A$ としてよい. $f: A \cup \{a\} \rightarrow A$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x = a) \\ x + 1 & (x \in \mathbb{N}) \\ x & (x \in A \setminus \mathbb{N}) \end{cases}$$

で定めれば, f は全単射となる. よって $|A \cup \{a\}| = |A|$ を得る.

2. 集合 $\mathcal{F}$ を

$$f: B \rightarrow B \times \{0, 1\}, B \subset A$$

なる全単射関数 f の全体とする. $B \subset A$ が可算無限集合のときは, このような f は存在するので, $\mathcal{F}$ は空でない. $\mathcal{F}$ に対して, 包含関係 (関数の拡大) で順序を入れる. このとき, Zorn の補題により, $\mathcal{F}$ の極大元 g が存在する. $D := \text{dom}(g)$ とかくとき, $E = A \setminus D$ は有限である. (E が無限とすれば, 可算無限集合 $E_0 \subset E$ がとれて, $g' \in \mathcal{F}$, $g': E_0 \rightarrow E_0 \times \{0, 1\}$ が存在する. $f := g \cup g'$ は g を拡大する $\mathcal{F}$ の元となり, g の極大性に反する.)

$E = A \setminus D$ が有限なので, 1 を繰り返し使うことにより, 二つの全単射

$$\begin{aligned} h: D \cup E &\rightarrow D, \\ k: D \times \{0, 1\} &\rightarrow (D \cup E) \times \{0, 1\} \end{aligned}$$

がとれる. このとき, 合成関数 $k \circ g \circ h: A \rightarrow A \times \{0, 1\}$ が全単射になり, $|A \times \{0, 1\}| = |A|$ がわかる.

3. 2 番と同様の議論. 演習問題 172 を参照.

系 166 $|A| \leq |B|$ として, さらに B は無限集合とする. このとき,

1. $|A \cup B| = |B|$;
2. $|A \times B| = |B|$;

$$3. |B^n| = |B| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

証明: 1, 2 はすでに終わっている. 3 は帰納法.

定理 167 1. $|A| < |\mathcal{P}(A)|$;

$$2. X \text{ が } 2 \text{ 元以上持つとき, } |A| < |X^A|.$$

証明: 1 は終わっている. 2 は $X = \{0, 1\}$ の場合に示せばよい. その場合 $\{0, 1\}^A$ は A 上の定義関数全体になるので, 1 に帰着される.

注意 168 • 我々の立場では, $|A| = |B|$ という表記はあるが, A の濃度 $|A|$ や B の濃度 $|B|$ というものはまだ定義されていなかった.
• A に対して $|A|$ を正確に定義するためには, A の大きさ (濃度) を測る指標が用意されなければならない. その大きさの指標が基数とよばれるものである.

この講義では基数を厳密に定義することはしない. 厳密な議論は排除して, 感覚的な定義を行う.

定義 169 1. 自然数は基数であり, 有限集合の濃度は自然数である.

2. $\mathbb{N}$ の濃度は $\aleph_0$ とかかれる. したがって, 「 A が可算 $\iff |A| \leq \aleph_0$ 」である.

3. κ, λ が基数のとき, 基数の和, 積, べきを以下のように定義する.

(a) $\kappa + \lambda = |A \cup B|$, ただし, A, B は $|A| = \kappa, |B| = \lambda, A \cap B = \emptyset$ なる集合.

(b) $\kappa \cdot \lambda = |A \times B|$, ただし, A, B は $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ なる集合.

(c) $\kappa^\lambda = |A^B|$, ただし, A, B は $|A| = \kappa, |B| = \lambda$ なる集合.

例 170 1. $|\{0, 1, 2, 3\}| = 4$,

$$|\{0, 1\} \times \{0, 1, 2, 3\}| = 8,$$

$$2. |\mathbb{N}| = \aleph_0, |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0,$$

$$3. \aleph_0 + 1 = \aleph_0, \aleph_0 \times 2 = \aleph_0, \aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0.$$

定理 171 κ, λ は基数とする.

$$1. \kappa \text{ または } \lambda \text{ のどちらかが無限ならば, } \kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}.$$

$$2. 2^\lambda > \lambda.$$

証明: 1. 系 166 の 1 番, 2 番の言い換えである.

2. 定理 167 の 2 番の言い換えである .

演習問題 172 1. 定理 165 の 1 番を繰り返し使って , A が無限集合で , $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ が有限のとき , $A \sim A \cup B$ となることを示せ .

2. 定理 165 の 2 番の証明中に現れる $\mathcal{F}$ が実際に Zorn の補題が適用可能となる条件を満たすことを示せ . (ヒント : $C \subset \mathcal{F}$ が鎖のとき , $\bigcup C \in \mathcal{F}$ となることを示せ .)

3. 無限集合 A と B が対等のとき , $A \cup B$ と A が対等になることを示せ .

4. A が無限集合のとき , A^2 と A は対等になる . これを以下の手順で示せ .

(a) A が可算無限集合のときは , 正しい .

(b) 集合 $\mathcal{G}$ を

$$g : B \rightarrow B^2, B \subset A$$

なる全単射 g の全体とする . $\mathcal{G}$ に対して , 包含関係 (関数の拡大) で順序を入れる . このとき , Zorn の補題により , $\mathcal{G}$ の極大元 g^* が存在することを示す .

(c) $D = \text{dom} g^*$ とおく . D が A と対等のときは , 全単射 $h : D \rightarrow A$ と g^* を用いて , A と A^2 との間の全単射を構成する . (ヒント : $(h, h) \circ g^* \circ h^{-1}$ が A と A^2 の間の全単射を与える .)

(d) D の濃度が A より真に小さいとして矛盾を導く . もし濃度が小さければ , $A \setminus D$ の中に D と対等な集合 E がとれる . $(D \cup E)^2 = D^2 \cup (D \times E) \cup (E \times D) \cup E^2$ と分割する . 集合 $D \times E, E \times D, E^2$ はすべて E^2 と対等である . よって $(D \times E) \cup (E \times D) \cup E^2 \sim E^2$ となる . $D \sim E$ と g^* の存在により , $E^2 \sim E$ なので , $(D \times E) \cup (E \times D) \cup E^2 \sim E$ を得る . 全単射 $h : E \rightarrow (D \times E) \cup (E \times D) \cup E^2$ をとり , $f = g^* \cup h$ を作ると , g^* を真に拡大する $\mathcal{G}$ の元となり矛盾を得る .

5. 無限集合 A と B が対等のとき , $A \times B$ は A と対等になることを示せ .

演習問題 173 いま $\mathbb{R}$ の濃度を κ と表記する ($|\mathbb{R}| = \kappa$) . 次の基数の計算を行い , できるだけ簡単な形で

表せ .

1. $\aleph_0 + 1$
2. $\aleph_0 + \aleph_0$
3. $\aleph_0 \cdot \aleph_0$
4. $\aleph_0 + \aleph_0 \cdot \aleph_0$
5. $(\aleph_0)^3$
6. $2^{\aleph_0}$
7. $\kappa + \aleph_0$
8. $(2^{\aleph_0} + \aleph_0) \cdot \kappa$

演習問題 174 1. $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ から $\mathbb{R}$ への単射を一つ与えよ (定理 157 の証明参照) . これを用いて , $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$ を示せ .

2. $|\mathcal{P}(\mathbb{Q})| = 2^{\aleph_0}$ を示せ .

3. $\mathbb{R}$ から $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ への単射を一つ与えよ . (ヒント : $r \in \mathbb{R}$ に対して , $I(r) \cap \mathbb{Q}$ を対応させる .) これと上のことから , $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ を結論せよ .

演習問題 175 1. $(X^Y)^Z$ と $X^{(Y \times Z)}$ は対等になることを示せ . (既出問題)

2. $(2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$ を示せ .

3. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への連続関数全体を $C^0(\mathbb{R})$ とかくとき , $|C^0(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ を示せ . (ヒント : 連続関数では , 有理数上での値が決定されれば , すべての実数上での値が決まる .)

4. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数全体を $\mathcal{F}$ とかくとき , $|\mathcal{F}| > 2^{\aleph_0}$ を示せ .

5. $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ を示せ .