集合入門

本講義では「集合」に関する基本的な概念と性質について講義する．高校である程度は集合について学んできたものと仮定して議論を行う．

１学期

1. 高校の復習など
2. ベキ集合，直積集合
3. ２項関係その１（同値関係，同値類，分割）
4. ２項関係その２（擬順序，順序）
5. 関数その１
6. 関数その２
7. 全順序集合
8. 数の構成その１（$\mathbb{N}$ から $\mathbb{Z}$ を構成する）
9. 数の構成その２（$\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Q}$ を構成する）
10. 数の構成その３（時間があれば $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{R}$ の構成）

2 学期

1. 整列集合，辞書式順序
2. 超限帰納法
3. 選択公理
4. Zorn の補題
5. 整列可能性定理
6. ベルンシュタインの定理
7. 可算集合
8. 対角線論法
9. 集合の大きさと濃度

以上が２学期間で講義するおおまかな内容を列挙したものである．微積分や線形代数に比べて抽象的な概念や議論が多いのでややもすると目標を失って勉学の意欲が薄れてしまうことがある．しかし，抽象的な概念は「学生をわからなくさせようとして」考え出されたものではない．多くの似た状況を統一的に議論するためには必要不可欠なのである．抽象的な概念も自分で演習問題を解いているうちに具体性を持った概念として理解できるはずである．手や頭（場合によっては足）を実際に動かすことはとても重要である．

１学期の前半で現れる概念の中で特に重要なのは同値関係と順序である．数学において，「似ているものを同一視する（同じものと見る）」ことが度々有効となる．同値関係はどれとどれを同一視するかを記述する．順序という言葉は日常生活においてもよく使われる．「大学を順序付けする」などという使われ方をしている．世間では一列に並んでいるという意味に順序という言葉を使うことが多い．しかし数学での順序は必ずしも一列に並べることを意味しない．比較できない（大小を決定できない）場合も想定して，もう少し広い意味で順序という概念を考える．数学では一列に並んだ順序は全順序とよんでいる．

１学期の後半では数の構成を扱う．高校では整数，有理数，実数というものの存在を直観的に認めて議論をしてきた．本講義では，自然数の集合（とその上の構造）は認めた上で，整数の集合，有理数の集合，実数の集合を数学的にある程度厳密に構成する．その構成において，上述の順序や同値関係が重要な役割を演じる．

２学期に講義する項目で特に重要なのは，選択公理と濃度の概念である．

数学における存在証明には，構成的な証明と超越的な証明がある．例えばある性質を満たす数 x の存在が証明されたとする．このとき，その証明を追うことにより，x が具体的にどの数かがわかる場合はその証明は構成的な証明である．しかし存在はわかっても，実際にどの数であるかがわからない場合も多い．このような証明方法は超越的といわれる．次の例を考えよう．

例．x^y が有理数となる無理数 x, y が存在する．このことは以下のように証明できる．$\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ を考える．α が有理数ならば $x = y = \sqrt{2}$ がそのよう

な無理数である．もし $\alpha = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ が無理数ならば，$\alpha^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$ より，$x = \alpha, \, y = \sqrt{2}$ が求めたい無理数の一組となる．

上の例における証明では，x, y が具体的に与えられるわけでない．しかし存在は証明されている．このような証明方法は超越的と言われる．もちろん全てが構成的に証明できればよいのだが，必ずしもそうではない．選択公理は超越的な証明を与えるための大きな力となる．（大雑把に述べれば，選択公理は空でない集合の列 $X_0, X_1.X_2, ...$ に対して，元の列 $x_0 \in X_0, \, x_1 \in X_1, \, x_2 \in X_2$ .. の存在を保証する．）

選択公理は直観的には分かりやすく，ある意味自明にも感じられる原理であるが，実際の数学に適用する際には技術的に難しい側面がある．そこで適用しやすい形に変形した命題がいくつか知られている．Zorn の補題，整列可能性定理などがそのような命題であり，選択公理と本質的に同等であることが知られている．

濃度とはおおざっぱに言えば集合の大きさのことである．２つ集合 A, B が与えられたときに，その大きさの比較を行いたい．A から B への単射があるとき，A の濃度が B の濃度以下であるといい $|A| \leq |B|$ とかこう．$|A| \leq |B|$ であり $|B| \leq |A|$ でもあるとき，A と B の間に全単射が存在する．この主張がベルンシュタインの定理である．無限集合の中で一番濃度が小さいものが可算集合である．可算集合は自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ と濃度が等しい集合といってもよい．可算でない無限集合も実は存在する．この事実を示すためには対角線論法という議論が必要になる．２学期の後半では，これらについて順次考えてゆく．

1　基本的事項

集合とは「もの」の集まりである．「もの」はその集合の元（要素，点）とよばれる．以下において A, B, ... などは集合を表し，$a, b, x, ...$ などは集合の元を表す．集合自体が他の集合の元になることもある．

最初に記法の復習を行う．ほとんどは高校で習っているであろう．

記法 1

- $a \in A \cdots$ a が A に属する．$a \notin A \cdots$ a が A に属さない．
- $A = B \cdots$ 集合 A と集合 B が等しい ($\forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$)．
- $A \subset B \cdots$ A が B の部分集合である ($\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$)．
- $\{x \in A : C(x)\} \cdots$ 集合 A に属する元 x の中で条件 $C(x)$ を満たすものだけを集めた集合．A が明らかなときは省略することがある．
- $\emptyset \cdots$ 空集合（元を全く含まない集合）．
- $\{a, b\} \cdots$ 丁度 a と b だけを元として含む集合．($\{a\}$, $\{a_1, ..., a_n\}$ などの表現も用いる．)
- $A \cup B \cdots$ A と B の和集合．($A_1 \cup \cdots \cup A_n$ などの表現も用いる．)
- $A \cap B \cdots$ A と B の共通部分．($A_1 \cap \cdots \cap A_n$ などの表現も用いる．)

例 2

1. $0 \in \{0, 1\}$.
2. $2 \notin \{0, 1\}$.
3. $\emptyset \subset \{0, 1\}$.

定義 3 $\mathcal{C} = \{A_i : i \in I\}$ を集合を元とする集合とする．

1. A_i たちの和集合は $\bigcup_{i \in I} A_i$ または $\bigcup \mathcal{C}$ で表す．
2. A_i たちの共通部分は $\bigcap_{i \in I} A_i$ または $\bigcap \mathcal{C}$ で表す．

例 4

1. $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$.
2. $\{0, 1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1, 2\}$.
3. $\mathcal{C} = \{\{0, 1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$ とするとき，$\bigcup \mathcal{C} = \{0, 1\} \cup \{1, 2\} \cup \{3\} = \{0, 1, 2, 3\}$.

記法 5

- $\mathbb{N} \cdots$ 自然数全体の集合（この講義では自然数は 0 から始まる），
- $\mathbb{Z} \cdots$ 整数全体の集合,
- $\mathbb{Q} \cdots$ 有理数全体の集合,
- $\mathbb{R} \cdots$ 実数全体の集合,
- $\mathbb{C} \cdots$ 複素数全体の集合.

例 6

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
2. $\{x \in \mathbb{N} : 0 \leq x \leq 5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
3. $\{0, 1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\}$.

記法 7

- 記号 $\forall$ は「すべて」の意味に使う．$\forall x....$ は「すべての x に対して ... である」のこと．
- 記号 $\exists$ は「存在する」あるいは「適当な」の意味に使う．$\exists x....$ は「... となる x が存在する」,「適当な x を選ぶと... である」という意味である．
- 記号 $\Rightarrow$ は「ならば」の意味に使う．$p \Rightarrow q$ は「p ならば q」,「p が成り立てば q も成り立つ」という意味である．$\Rightarrow$ と $\Leftarrow$ の両方が成立するとき，$\Leftrightarrow$ とかく．よって $p \Leftrightarrow q$ は「p と q が同等（同値）」という意味である．

例 8

1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単調増加であることは，記号を用いると，
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ (\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ )$$
とかける．
2. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単調増加でないことは，記号を用いると，
$$\exists x, y \in \mathbb{R} \ (\ x < y \text{ かつ } f(x) \geq f(y)\ )$$
とかける．
3. 「$0 = 1 \Rightarrow 2 = 3$」は正しい数学の主張である．仮定「$0 = 1$」が正しくないので，全体は正しい主張になる．

例 9 $\mathcal{C} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対して，$\bigcap \mathcal{C} = \{x : \forall n \in \mathbb{N}(x \in A_n)\}$, $\bigcup \mathcal{C} = \{x : \exists n \in \mathbb{N}(x \in A_n)\}$.

演習問題 10　1. 次の命題を記号（$\forall, \exists, \Rightarrow$ など）を用いてかけ．

(a) $f : A \to B$ は単射である．

(b) $f : A \to B$ は全射である．

(c) $f : A \to B$ は全単射である．

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単調増加である．

(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は単調減少である．

(f) $a \in \mathbb{R}$ で $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は最大値（$f(a)$）をとる．

(g) $a \in \mathbb{R}$ で $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は極大値（$f(a)$）をとる．

(h) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の値域に a が含まれる．

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は最大値を持つ．

2. 上の命題の否定命題をかけ．

3. 次の議論はそれぞれ正しいか．

(a)「$P \Rightarrow Q$」が証明されたとする．このとき，もし P が成立しなければ，Q も成立しない．

(b)「$x = 1$ ならば $x + 1 = 2$」は正しい．したがって x に 2 を代入した命題「$2 = 1$ ならば $3 = 2$」も正しい．

(c)「$P \iff Q$」が成立しないときは,「$P \Rightarrow Q$」も成立しないし,「$Q \Rightarrow P$」も成立しない．

4. $\emptyset \subset A$ を示せ．

5. $A \cup \emptyset = A$ を示せ．

6. $\{\emptyset\} \neq \emptyset$ を示せ．

7. $\bigcup \emptyset = \emptyset$ を示せ．

8. $\mathcal{C} = \{\{0,1\},\{1,2\},\{1,3\}\}$ のとき, $\bigcup \mathcal{C}$ と $\bigcap \mathcal{C}$ を求めよ．

9. $\{a\} = \{b\}$ ならば $a = b$ となることを示せ．

10. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を示せ．

11. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を示せ．

12.「$A \subset B \iff A \cup B = B$」を示せ．

13.「($A \subset C$ かつ $B \subset C$) $\Rightarrow A \cup B \subset C$」を示せ．

14.「$(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \iff C \subset A$」を示せ．

15. 扱う集合がすべて大きな集合 X（全体集合）の部分集合の場合，$A \subset X$ の補集合 A^c とは $A^c = \{x \in X : x \notin A\}$ のことである．

(a) $A \cap B = \emptyset$, $A^c \cap B = \emptyset$ のとき $B = \emptyset$ となることを示せ．また図を用いてこれを説明せよ．

(b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ を示せ．

(c) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ を示せ．

16. $A \setminus B = \{a \in A : a \notin B\}$ とする．

(a) $A \setminus B = A \cap B^c$ を示せ．

(b) $A \cap B = \emptyset \iff A \setminus B = A$ を示せ．

17. $A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ と定義する．このとき,

(a) $A + B = B + A$, $A + \emptyset = A$, $A + A = \emptyset$ を示せ．

(b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ を示せ．

18. $\mathcal{C} = \{A_i : i \in \mathbb{N}\}$ に対して，$\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{n+1} = \mathcal{C}_n \cup \{A \cup B : A, B \in \mathcal{C}_n\} \cup \{A \cap B : A, B \in \mathcal{C}_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ と帰納的に定義する．また $\mathcal{C}^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{C}_n$ とする．

(a) 空でない有限集合 $F \subset \mathbb{N}$ に対して，$\bigcap_{k \in F} A_k \in \mathcal{C}^*$ となることを示せ．

(b) 空でない有限集合の列 $F_0, ..., F_n$ に対して，

$$\bigcap_{k \in F_1} A_k \cup \cdots \cup \bigcap_{k \in F_n} A_k \in \mathcal{C}^*$$

となることを示せ．

(c) $\mathcal{C}^*$ に属する任意の集合は (b) の形でかけることを示せ．

2 べき集合，直積集合

【復習】

- 二つの集合が等しいかどうかを調べるには, それらに属する元を調べればよい.
  例）$\{\emptyset\} \neq \emptyset$ を示せ：左辺に属する元は $\emptyset$ である．しかし右辺に属する元はない．したがって二つの集合 $\{\emptyset\}$ と $\emptyset$ は異なる.
- $\mathcal{C} = \{\{0,1\},\{1,2\}\}$ のとき，$\bigcup \mathcal{C} = \{0,1\} \cup \{1,2\} = \{0,1,2\}$.
- （条件で与えられる集合）
  1. $\{x \in A : x = x\} = A$, $\{x \in A : x \neq x\} = \emptyset$.
  2. $B = \{x \in A : x \notin x\}$ とするとき, $B \notin A$.

定義 11（べき集合）集合 A に対して，A の部分集合全体からなる集合を $\mathcal{P}(A)$ とかき，A のべき集合とよぶ.

注意 12 $X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subset A$ である.

例 13 $A = \{0,1\}$ のとき，A の部分集合は $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ の 4 つである．したがって,

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\}.$$

例 14 A が有限集合でその元の個数が n のとき，$\mathcal{P}(A)$ は 2^n 個の元を持つ.（証明）$A = \{a_1, ..., a_n\}$ とする．集合 $X \in \mathcal{P}(A)$ はどの a_k $(k = 1, ..., n)$ が X に属するかで決まる．各 k について，a_k が属する否かの 2 通りの可能性．$k = 1, ...n$ なので全体で 2^n 通りの可能性がある．よって $\mathcal{P}(A)$ は 2^n 個の集合を元として持つ.

注意 15 x と y の順序対 (x,y) に要請されることは

$$(x,y) = (u,v) \Rightarrow x = u \text{ かつ } y = v$$

である．順序対は集合を使って表現できる.

定義 16（順序対）$(x,y) = \{\{x\},\{x,y\}\}$ と定義する.

命題 17

$$(x,y) = (u,v) \quad \Rightarrow \quad x = u \text{ かつ } y = v$$

証明： $x = y$ のときと, $x \neq y$ のときに分けて議論する．($x = y$ のとき) $(x,y) = \{\{x\},\{x,x\}\} = \{\{x\}\}$. これが $(u,v) = \{\{u\},\{u,v\}\}$ と一致するので, $u = v$ がわかる．このとき，$(u,v) = \{\{u\}\}$ であり，さらに $x = u$（および $y = x = u = v$）がわかる．($x \neq y$ のとき）$\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$ より，1 元集合 $\{x\}$ は 1 元集合 $\{u\}$ と一致する．よって $x = u$ である．同様に 2 元集合の一致から $\{x,y\} = \{u,v\}$ である．y は u か v のいずれかと等しい．もし $y = u$ ならば $y = u = x$ となり $y \neq x$ の仮定に反してしまう．よって $y = v$ を得る.

注意 18
1. $a \in A$, $b \in B$ のとき，$(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$.
2. 順序対を定義 16 のように集合を使って導入しなければならない訳ではない．例えば命題 17 が成立する対象として天下り的に導入してもよい．しかし，数学に現れる多くの概念が集合を通して定義できることを知るのは重要である.

定義 19（直積集合）二つの集合 A, B に対して,

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$$

を A と B の直積集合という．$A \times A$ のことは，A^2 と略記する．また（帰納的に）$A^{n+1} = A^n \times A$ とする.

注意 20 $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ の間には次のような全単射が存在する.

$$((a,b),c) \mapsto (a,(b,c)).$$

このことから，$((a,b),c)$ と $(a,(b,c))$ を同一視して，単に (a,b,c) とかく．またこの二つの集合 $(A \times B) \times C$ と $A \times (B \times C)$ を同一視して，単に $A \times B \times C$ とかく.

演習問題 21

1. $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$ を示せ．
2. $A \subset B$ でなおかつ $A \in B$ となる A, B の例を与えよ．
3. $A_0 = \emptyset$ として A_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ を帰納的に $A_{n+1} = A_n \cup \{A_n\}$ で定義する．
   (a) A_1, A_2, A_3 を具体的に求めよ．
   (b)「$n \neq m \Rightarrow A_n \neq A_m$」を示せ．
4. $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ を示せ．
5. $\mathcal{P}(\{\emptyset\})$ を具体的に求めよ．
6. $\mathcal{P}(\{a\})$ を具体的に求めよ．
7. $\mathcal{P}(\{a, b\})$ を具体的に求めよ．
8. $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ を具体的に求めよ．
9. 「$A \subset B \iff \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$」を示せ．
10. $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ を示せ．
11. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ が成立しない例（反例）をあげよ．
12. $A \cap B = \emptyset$ のとき，$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ を求めよ．
13. $\bigcap_{X \in \mathcal{P}(A)} X = \emptyset$ を示せ．
14. $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$ を示せ．
15. $\{1, 2, 3\} \times \{2, 3\}$ を具体的に求めよ．
16. 有限集合 A の元の個数が n のとき，A^2 の元の個数を求めよ．
17. $A \times \emptyset = \emptyset$ を示せ．
18. a, b を異なる元とするとき，$(A \times \{a\}) \cap (B \times \{b\}) = \emptyset$ を示せ．
19. $B \cap C = \emptyset$ のとき，$(A \times B) \cap (A \times C) = \emptyset$ を示せ．
20. $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$ を示せ．
21. $(A \cap B) \times (X \cap Y) = (A \times X) \cap (B \times Y)$ を示せ．（図を描いて考えよ．）
22. 「$A = \emptyset$ または $B = \emptyset$」$\iff A \times B = \emptyset$ を示せ．
23. $A \subset X$, $B \subset Y$ ならば $A \times B \subset X \times Y$ を示せ．
24. 上の逆は必ずしも成立しないことを示せ．ただし $A \times B \neq \emptyset$ の条件のもとで，逆も成立することを示せ．
25. $A_0 \in \mathcal{P}(A)$, $B_0 \in \mathcal{P}(B)$ のとき，$A_0 \times B_0 \in \mathcal{P}(A \times B)$ を示せ．
26. 上において，一般には $\mathcal{P}(A \times B)$ の元となる集合で $A_0 \times B_0$ の形でないものが存在する．そのような A, B の例を与えよ．
27. $A_0 = \emptyset$, $A_{n+1} = \mathcal{P}(A_n)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ と帰納的に定めるとき，集合 A_n の元の個数はいくつか．

3　関係１

【復習】 集合 A, B に対して，

- べき集合： $\mathcal{P}(A) = \{X : X \subset A\}$.
- 直積集合： $A \times B = \{(a,b) : a \in A,\ b \in B\}$. ただし，$(a,b)$ は a,b の順序対である．

前回の講義で順序対を集合として定義できることを学んだ．今回は関係という概念を集合を使って導入する．

例 22 実数の集合 $\mathbb{R}$ 上の大小関係 $<$ に対して，$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$O = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$$

が対応する．逆に上の集合 $O \subset \mathbb{R}^2$ が与えられれば，大小関係 $a < b$ を「$a < b \iff (a,b) \in O$」で定義できる．

このことをもとに２項関係という概念を集合を用いて以下のように定義しよう．

定義 23（２項関係）$X \neq \emptyset$ とする．X 上の２項関係 R とは X^2 の部分集合のことである．$(x,y) \in R$ のとき，xRy とかくことがある．

例 24
1. $\emptyset \subset X^2$ なので，$R = \emptyset$ は２項関係である．この場合，任意の２点は R の意味で無関係になる．
2. $R = X^2$ 自体も X 上の２項関係である．このとき，X の任意の２点は R の意味で関係がある．

２項関係の中で特に重要なものが二つある．それは，「同値関係」とよばれる関係と「順序」とよばれる関係である．今回は同値関係について学ぶ．

定義 25（同値関係）X 上の２項関係 $E \subset X^2$ が（X 上の）同値関係であるとは，次の３条件が満たされることである．

1. （反射性）xEx $(\forall x \in X)$
2. （対称性）$xEy \Rightarrow yEx$ $(\forall x,y \in X)$.
3. （推移性） $xEy, yEz \Rightarrow xEz$ $(\forall x,y,z \in X)$.

例 26
1. X 上の等号関係 $\Delta = \{(x,y) \in X^2 : x = y\}$ は同値関係である．
2. $\mathbb{Z}$ 上の２項関係 E を「$mEn \iff m-n$ が３の倍数」で定義する．このとき，E は同値関係である．

定義 27（同値類）E を X 上の同値関係とする．$x \in X$ に対して，集合

$$\{y \in X : xEy\}$$

を（E に関して）x の属する同値類とよび，$[x]_E$, x/E などで表す．同値類の全体 $\{[x]_E : x \in X\}$ は X/E とかく．

例 28
1. $\mathbb{Z}$ 上の２項関係を「$a \sim b \iff a-b$ が偶数」で定義する．$\sim$ は同値関係になる．
2. $1/\sim$ は奇数全体の集合になる．
3. $a \approx b \iff a-b$ が奇数と定義すると，$\approx$ は同値関係ではない．

例 29 複素数の集合 $\mathbb{C}$ において，２項関係 $\sim$ を $x \sim y \iff |x| = |y|$ で定義する．このとき，$\sim$ は同値関係である．また $1/\sim$ は絶対値が１の複素数全体（複素平面の単位円）である．

補題 30 E を X 上の同値関係とするとき，

$$[x]_E = [y]_E \iff xEy.$$

定義 31（分割）$\mathcal{C}$ が X の分割であるとは，次の３条件が成り立つことである．

- $A \in \mathcal{C} \Rightarrow A \neq \emptyset$,
- $A, B \in \mathcal{C}, A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$,
- $\bigcup \mathcal{C} = X$

例 32 $f : A \to B$ を関数として，R を f の値域とする．$b \in R$ に対して，$A_b = \{a \in A : f(a) = b\}$ とする．$\mathcal{C} = \{A_b : b \in R\}$ は A の分割になる．

定理 33（同値関係と分割）$X \neq \emptyset$ とする．

1. E を X 上の同値関係とする．このとき，X/E は X の分割となる．
2. $\mathcal{C}$ を X の分割とする．このとき，２項関係 E を $xEy \iff (\exists A \in \mathcal{C})[x,y \in A]$ で定義すれば，E は X 上の同値関係になる．

演習問題 34 1. $A = \{0,1,2,3\}$ として，2 項関係 E を $E = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(0,1),(1,0)\}$ とする．

(a) E は A 上の同値関係になることを示せ．

(b) $\mathcal{C} = A/E$ とする．$\mathcal{C}$ を具体的に求めよ．

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ を関数とする．$\mathbb{N}$ 上の関係 $a \sim b$ を $f(a) = f(b)$ で定義する．このとき，$\sim$ が $\mathbb{N}$ 上の同値関係になることを示せ．

3. 上の状況で $a \sim b$ を $f(a) \neq f(b)$ で定義すると，これは同値関係になるか？

4. $A \subset \mathbb{Z}$ として，$\mathbb{Z}$ 上の 2 項関係 E を

$$xEy \iff x - y \in A$$

で定義する．次の各場合に E が $\mathbb{Z}$ 上の同値関係になるかどうかを判定せよ．

(a) $A = \mathbb{Z}$

(b) $A = \emptyset$

(c) $A = \{0\}$

(d) $A = \{1\}$

(e) $A = m\mathbb{Z}$ (m の倍数全体)

(f) $A =$ 素数全体

(g) $A = \{x \in \mathbb{Z} : -10 \leq x \leq 10\}$.

(h) $A = \mathbb{N}$.

5. $E, F \subset A^2$ を A 上の同値関係とする．$E \cap F$ も A 上の同値関係になることを示せ．

6. 上の状況で，$E \cup F$ は同値関係になるか．

7. $A \subset \mathbb{N}^2$ を空でない集合で，反射性（$(x,x) \in A$）と対称性（$(x,y) \in A \Rightarrow (y,x) \in A$）を仮定する．いま $x, y \in \mathbb{N}$ に対して

- $x_0 = x$, $x_n = y$,
- $(x_i, x_{i+1}) \in A$ $(i = 0, ..., n-1)$

となる $x_0, ..., x_n \in \mathbb{N}$ が存在するとき，$x \sim y$ とかく．2 項関係 $\sim$ は $\mathbb{N}$ 上の同値関係になることを示せ．

8. $E, F \subset A^2$ を A 上の同値関係とする．E と F の両方を含む最小の同値関係が存在することを示せ．

9. X を元の個数が n の有限集合として，E を X 上の同値関係とする．集合 X/E の元の個数が n 個未満ならば，いずれかの同値類 $[x]_E$ は元が 2 個以上あることを示せ．

10. $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ とする（すなわち $\vec{0}$ でない平面ベクトル全体）．X 上の 2 項関係 $\sim$ を

$$\vec{x} \sim \vec{y} \iff (\exists \lambda \neq 0)(\vec{x} = \lambda \vec{y})$$

で定義する．$\sim$ が同値関係になることを示せ．

11. E を X 上の同値関係とする．E によって得られる同値類の全体を $\mathcal{C} = X/E$ とする．また分割 $\mathcal{C}$ によって得られる X 上の同値関係を F とする．$E = F$ を示せ．

12. 集合 X 上の n 項関係はどのように定義されるか．

13. 集合 X と Y の間の 2 項関係はどのように定義されるか．

14. $R \subset \mathbb{R}^2$ に対して，

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1, y+2) \in \mathbb{R}\}$$

を作る．S の表す図形は R を x 軸方向に 1，y 軸方向に -2 だけ移動して得られる．これを説明せよ．

4　関係２

【復習】

- 集合 A に対して，$R \subset A^2$ を A 上の（２項）関係とよぶ．また，$(a,b) \in R$ のことを（見やすいように）aRb とかくことがある．
- A 上の関係 E が A 上の同値関係であるとは，反射性, 対称性, 推移性が成り立つことである．
- $\mathcal{C} = \{X_i : i \in I\}$ が A の分割であるとは，(1) 各 X_i は空でない，(2)$i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$, (3) $A = \bigcup_{i \in I} X_i$ が成り立つことである．
- E が A 上の同値関係のとき，$a \in A$ に対して，$[a]_E = \{x \in A : xEa\}$ を a の属する（E に関する）同値類という．同値類全体 A/E は A の分割となる．

4.1　順序

関係の中で特に重要なものが同値関係と順序である．今回は順序 (order) について学ぶ．最初に擬順序 (preorder) を定義する．

定義 35（擬順序）A 上の２項関係 O が擬順序であるとは，

1. （反射性）$a\ O\ a$ $(\forall a \in A)$
2. （推移性）$a\,O\,b,\ b\,O\,c \ \Rightarrow\ a\,O\,c$ $(\forall a,b,c \in A)$

が成立することである．（擬順序に対しては，（見やすいように）O の代わりに $\leq$，$\preceq$ などを使うことが多い．）

例 36 ある中学校のクラス A において，生徒を数学の点数によって並べる．「$a \preceq b \iff a$ の点数は b の点数以下」という関係を考える．このとき，$\preceq$ は擬順序になる．

例 37 $\leq$ を A 上の擬順序とする．$a \leq b$, $b \leq a$ であっても必ずしも等号 $a = b$ は成立しない．実際上の例では，同じ点数をとる生徒が二人いた場合には等号が成立しない．

定義 38（順序）A 上の擬順序 $\preceq$ がさらに次の条件を満足するとき，A 上の順序とよばれる．

3. $a \preceq b,\ b \preceq a \ \Rightarrow\ a = b.$

集合 A とその上の順序 $\preceq$ を組にして考えるとき，A は順序集合とよばれることがある（より正確には $(A, \preceq)$ が順序集合）．

例 39 $X = \mathcal{P}(\{0,1\})$ は包含関係 $\subset$ によって順序集合になる．その順序構造は（上に行くほど大きいとして）以下の図のようになる．

$$\begin{array}{ccccc} & & \{0,1\} & & \\ & \nearrow & & \nwarrow & \\ \{0\} & & & & \{1\} \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \emptyset & & \end{array}$$

4.2　擬順序と同値関係

補題 40 $\preceq$ を A 上の擬順序とする．A 上の２項関係 $\sim$ を

$$a \sim b \iff (a \preceq b \text{ かつ } b \preceq a)$$

で入れる．このとき，$\sim$ は同値関係になる．

証明： ３条件を調べればよい．（１）擬順序の反射性から $\sim$ の反射性が得られる．（２）擬順序の推移性から $\sim$ の推移性が得られる．（３）$\sim$ の定義から $\sim$ の対称性が得られる．

定理 41 $\preceq$ を A 上の擬順序として, 同値関係 $\sim$（$a \sim b \iff (a \preceq b \text{ かつ } b \preceq a)$）を考える．同値類の全体

$$A/\!\sim\ = \{[a] : a \in A\}$$

に対して，２項関係 $\preceq^*$ を

$$[a] \preceq^* [b] \iff a \leq b$$

で定義する．このとき，$\preceq^*$ は $A/\!\sim$ 上の順序になる．

証明： 以下を順に調べればよい．

- 整合的に定義されていること (well-definedness).
- 反射性，推移性.
- $[a] \preceq^* [b],\ [b] \preceq^* [b] \ \Rightarrow\ [a] = [b]$.

演習問題 42

1. ある中学校の1年生全体 X を英語の点数によって以下のように順序付ける．

$$a \preceq b \iff \text{「} a \text{ の点数 } \leq b \text{ の点数」}$$

$\preceq$ が X 上の順序になるためにはどのような条件が必要か．

2. $X = \{0,1,2\}$ として，$O = \{(0,0),(1,1),(2,2),((0,1),(1,2)\}$ とする．O は X 上の擬順序ではない．理由を述べよ．

3. $X = \{0,1,2\}$ として，$O = \{(0,0),(1,1),(2,2),((0,1),(1,3)\}$ とする．O は X 上の順序になる．これを示せ．

4. $\mathbb{R}[X]$ ($\mathbb{R}$ 係数多項式全体) に対して,「$f(X) \preceq g(X) \iff f(X)$ の次数は $g(X)$ の次数以下」で定める．これは擬順序になることを示せ．また順序にはならないことを示せ．

5. $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 上に「$m \preceq n \iff n$ は m で割り切れる」という関係を入れる．これは順序になることを示せ．

6. $A = \mathcal{P}(X)$ 上の包含関係 $\subset$ は A 上の順序になることを示せ．$X = \{0,1,2\}$ の場合に，その順序を図で表せ．

7. 複素数の集合 $\mathbb{C}$ 上に「$\alpha \leq' \beta \iff |\alpha| \leq |\beta|$」なる関係 $\leq'$ を入れる．$\leq'$ は擬順序であるが，順序ではないことを示せ．

8. p を素数とする．$\mathbb{N}^+$ 上に「$m \leq' n \iff$ 素数 p が m を割り切れば n も割り切る」で定義される関係 $\leq'$ を考える．$\leq'$ は擬順序になることを示せ．順序になるか．

9. $A = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ 上に関係「$B \leq C \iff B \setminus C$ は有限集合」を考える．$\leq$ は擬順序となることを示せ．これは順序になるか．

10. $\mathbb{N}^2$ 上の 2 項関係 $\preceq$ を $(a,b) \preceq (c,d) \iff (3a+1)3^d \leq (3c+1)3^b$ で定める．ここで右辺の $\leq$ は通常の大小関係を意味する．
    (a) $\preceq$ は $\mathbb{N}^2$ 上の順序になることを示せ．
    (b) $\mathbb{N}^2$ の点列 $\{(a_i,b_i) : i \in \mathbb{N}\}$ で，各 $i \in \mathbb{N}$ に対して，

$$(a_{i+1}, b_{i+1}) \prec (a_i, b_i)$$

を満たすものを一つ見つけよ．ただし，$u \prec v$ は $u \preceq v$ かつ $u \neq v$ の省略形である．

11. 順序集合 $(A, \leq_A)$ と $(B, \leq_B)$ が順序同型であるとは，次の条件を満たす全単射 $f : A \to B$ が存在することである：

$$x \leq_A y \iff f(x) \leq_B f(y) \quad (\forall x, y \in A).$$

いま $A = \mathcal{P}(X)$ に対して，二つの順序を考える．

$$U \leq_1 V \iff U \subset V,$$

$$U \leq_2 V \iff V \subset U.$$

順序集合 $(A, \leq_1)$ と $(A, \leq_2)$ は順序同型になることを示せ．

5　関数１

いままで関係が集合として表現できることを見てきた．関数も集合として表現したい．関数の概念は既によく知っているが，集合論の中で関数をいかに扱うかを見ることは有意義である．我々は関数を関係の中の特殊なものと捉える．

定義 43（関数）$F \subset A \times B$ が次の条件を満たすとき A から B への関数（または写像）とよぶ：

(*) 任意の $a \in A$ に対して，$(a,b) \in F$ となる $b \in B$ が唯一つ存在する．

このとき記号で $F : A \to B$ とかく．また，$a \in A$ に対して，$(a,b) \in F$ となるただ一つの元 $b \in B$ は $F(a)$ で表す．

例 44 $F = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : 2a + b = 0\}$ は R から R への関数になる：$a \in \mathbb{R}$ に対して，$2a + b = 0$（すなわち $(a,b) \in F$）となる $b \in \mathbb{R}$ がただ一つ存在する．よって $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である．

定義 45 関数 $F : A \to B$ において，$a \in A$ が $b \in B$ にうつる（i.e., $F(a) = b$）とき，

$$F : a \mapsto b$$

とかく．（$\to$ と $\mapsto$ の違いに注意せよ．）

例 46 $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ とする

1. F は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ の関数となり，$F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ である．
2. F の行く先は常に 0 以上なので，$S = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ とおくとき，$F : \mathbb{R} \to S$ も正しい主張である．
3. F が $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数であることを，$F : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ と表記するのは誤りである．
4. $F : 2 \mapsto 4$ は正しい．

定義 47 関数 $F : A \to B$ を考える．

1. A を F の定義域とよび，$\mathrm{dom}F$ とかく．
2. 集合 $\{b \in B : b = F(a)\ (\exists a \in A)\}$ を F の値域とよび，$\mathrm{ran}F$ とかく．（すなわち，$\mathrm{ran}F = \{F(a) : a \in A\}$.）

定義 48 $F : A \to B$ を関数とする．

1. F が全射 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{ran}F = B$.
2. F が単射 $\Leftrightarrow$ 「$x \neq x' \Rightarrow F(x) \neq F(x')$ $(\forall x, x' \in A)$」．
3. F が全単射 $\Leftrightarrow$ F が全射でかつ単射．
4. $F : A \to B$ が全単射のとき，$F^{-1} = \{(b,a) \in B \times A : (a,b) \in A \times B\}$ を F の逆関数という．$F : a \mapsto b$ のとき，$F^{-1} : b \mapsto a$ である．

定義 49（像と逆像）関数 $F : X \to Y$, $A \subset X$, $B \subset Y$ に対して，

1. $F(A) = \{F(a) : a \in A\}$ を A の（F による）像という．
2. $F^{-1}(B) = \{a \in X : F(a) \in B\}$ を B の（F による）逆像という．

注意 50
1. $F : X \to Y$ のとき，$\mathrm{ran}F = F(X)$.
2. $A_1 \subset A_2 \subset X \Rightarrow F(A_1) \subset F(A_2) \subset Y$.
3. $B_1 \subset B_2 \subset Y \Rightarrow F^{-1}(B_1) \subset F^{-1}(B_2) \subset X$.

例 51 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $F : x \mapsto x^3 - x$ で定義する．$\mathrm{dom}F = \mathbb{R}$, $\mathrm{ran}F = \mathbb{R}$, $F(\{1,2\}) = \{0,7\}$, $F^{-1}(\{0\}) = \{-1,0,1\}$ である．

注意 52
1. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ として，関数 $F : A \to A$ を $F(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $F(\{\emptyset\}) = \emptyset$ で定義する．このとき $F(\{\emptyset\})$ を集合 $\{\emptyset\}$ の像と解釈するといかなる集合になるか．（$F(A)$ という表記には曖昧さがあるが，誤解を生むような状況は普通はない．区別が必要なときは，像は $F[A]$, $F''A$ などで表す．）
2. 逆像 $F^{-1}(B)$ は逆関数 F^{-1} による B の像ではない．F は必ずしも逆関数 F^{-1} を持たない．

定義 53 $F : A \to B$, $G : B \to C$ に対して，F と G の合成関数 $G \circ F$ は $G \circ F(a) = G(F(a))$ で定義される．より正確には次で定義される．

$$G \circ F = \{(a,c) \in A \times C : (a,b) \in F,\ (b,c) \in G (\exists b \in B)\}$$

命題 54 関数の合成は結合則を満たす．

演習問題 55

1. $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a + b = 1\}$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数となることを示せ.
2. $F = \{(a, b, c) \in R^3 : a + b + c = 0\}$ は $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ となることを示せ.
3. $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 = b\}$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数となることを示せ.
4. $F = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a = b^2\}$ は $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への関数でないことを示せ.

演習問題 56 次で定義される関数 $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の値域を求めよ.

1. $F(x) = x^2$,
2. $F(x) = x^3 + 1$,
3. $F(x) = \sin x + \cos x$.

演習問題 57 次の各関数は全射か，また単射か.

1. $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x + 1$
2. $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$
3. $H : \mathbb{R} \to S, x \mapsto x^2$ （ただし，$S = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$）
4. $K : \mathrm{S} \to \mathrm{S}, x \mapsto x^2$.

演習問題 58 $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $F(x, y) = (x + y, xy)$ で定義する．$\mathrm{ran} F \subset \mathbb{R}^2$ を座標平面上に図示せよ.

演習問題 59 $f : A \to B$ とする．像と逆像について以下の問いに答えよ.

1. $X \subset Y \subset A$ のとき，$f(X) \subset f(Y) \subset B$ となることを示せ.
2. $C \subset B$ のとき，$f(f^{-1}(C)) \subset C$ を示せ．等号が成立しない例を与えよ.
3. f が全射ならば, $C \subset B$ のとき, $f(f^{-1}(C)) = C$ となることを示せ.
4. $X \subset A$ に対して，$A \subset f^{-1}(f(A))$ を示せ.
5. f が単射ならば，$A = f^{-1}(f(A))$ となることを示せ.
6. $X_1, X_2 \subset A$ のとき，$f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ は成立するか．また $\cup$ についてはどうか.
7. $C_1, C_2 \subset B$ のとき，$f^{-1}(C_1) \cup f^{-1}(C_2) = f^{-1}(C_1 \cup C_2)$ となること示せ.
8. $f^{-1}(C_1) \cap f^{-1}(C_2) = f^{-1}(C_1 \cap C_2)$ は一般に成立するか.（像との比較）

演習問題 60 $f : X \to X$ に対して，$X_0 = X$, $X_{n+1} = f(X_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ と定める．集合の列 $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は包含関係に関して（広義）単調減少になることを示せ.

演習問題 61

1. $f : X \to Y$ に対して，$g : Y \to \mathcal{P}(X)$ を $g(y) = f^{-1}(\{y\})$ で定める．g は単射になることを示せ．X が 2 個以上の元を持てば，g は全射にはならないことを示せ.
2. $f : X \to Y$ とする．次が同値になることを示せ.
   (a) f が単射
   (b) $f(X \setminus A) \subset Y \setminus f(A)$ がすべての $A \subset X$ で成立する.

6　関数 2

【復習】 $F: X \to Y$ とする．

1. （像）$A \subset X$ に対して，$F(A) = \{F(a) : a \in A\}$.
2. （逆像）$B \subset X$ に対して，$F^{-1}(B) = \{a \in A : F(a) \in B\}$.
3. （定義域，値域） $\mathrm{dom}F = X, \mathrm{ran}F = F(x)$.

定義 62（各種関数）

1. $X \subset Y$ のとき，$F: X \to Y, x \mapsto x$ を X から Y への包含写像 (inclusion map) という．
2. X から X への包含写像を X 上の恒等写像 (identity map) という．通常 id_X とかかれる．
3. $F: X \to Y$, $X_0 \subset X$ のとき，F の定義域を X_0 に制限して得られる関数 $\{(x,y) \in F : x \in X_0\}$ を $F|X_0$ で表す．（$F|X_0 : X_0 \to Y$ である．）
4. 関数 $F: X \times Y \to X, (x,y) \mapsto x$ を（第一成分への）射影という．同様に $G: X \times Y \to Y$, $(x,y) \mapsto y$ を（第２成分への）射影という．
5. $A \subset X$ に対して，次で定義される $\chi_A : X \to \{0,1\}$ を A の特性関数（characteristic function）あるいは定義関数という．

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A. \end{cases}$$

注意 63
1. $\mathrm{ran}(F|X_0) = F(X_0)$.
2. 包含写像は単射である．
3. 射影 $\pi : X \times Y \to X, (x,y) \mapsto x$ が単射になるための必要十分条件は Y が１元集合でことである．
4. $A \subset X$ に対して，χ_A を対応させる関数は単射である．
5. $\chi_{A \cap B}(x) = \chi_A(x)\chi_B(x)$, $\chi_{A^c}(x) = 1 - \chi_A(x)$.

演習問題 64 $f: X \to Y, g: Y \to X$ とする．$g \circ f$ が X 上の恒等関数ならば，(i) f は単射であり，(ii) g は全射であることを示せ．

演習問題 65 $f: X \to Y, g: Y \to Z, h: Z \to W$ とする．$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ を示せ．

定義 66 集合 X から集合 Y への関数全体の集合を Y^X で表す．

注意 67
1. $Y^\emptyset = \{\emptyset\}$.（特に $Y = \emptyset$ のときも成立している．）
2. $X \neq \emptyset$ のとき，$\emptyset^X = \emptyset$.
3. X の元の個数が m, Y の元の個数が n のとき，Y^X の元の個数はいくつか．
4. $\mathcal{P}(X)$ と $\{0,1\}^X$ の間に自然な全単射がある．$A \mapsto \chi_A$ がそのような全単射である．

二つの集合 X_0 と X_1 の直積 $X_0 \times X_1$ はすでに定義してある．無限個の集合たち（集合族）の直積はどのように定義したらよいだろう．

定義 68（無限直積）$\{X_i : i \in I\}$ を添え字集合 I を持つ集合族とする．このとき，X_i たちの直積 $\prod_{i \in I} X_i$ は次の条件 (*) を満たす関数 $f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i$ の全体である：

(*) 各 $i \in I$ に対して，$f(i) \in X_i$.

例 69 $X_0 = \{1,2\}, X_1 = \{3,4\}$ のとき，$\prod_{i=0,1} X_i$ に属する関数は次の４つ：

1. $f(0) = 1, f(1) = 3$,
2. $g(0) = 1, g(1) = 4$,
3. $h(0) = 2, h(1) = 3$,
4. $k(0) = 2, k(1) = 4$.

命題 70
1. $X_i = \emptyset$ となる $i \in I$ があれば，$\prod_{i \in I} X_i = \emptyset$.
2. 二つの集合からなる集合族 $\{X_0, X_1\}$ に対して，$X_0 \times X_1$ と $\prod_{i \in \{0,1\}} X_i$ の間に自然な全単射が存在する．
3. すべての X_i が同じ X のとき（i.e., $X_i = X$ $(\forall i \in I)$），$\prod_{i \in I} X_i = X^I$.

証明： 1. $X_k = \emptyset$ とする．$\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ とすれば，$f \in \prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$ が存在する．定義から $f(k) \in X_k$ でなければならない．これは $X_k = \emptyset$ に反する．

2. $\prod_{i \in \{0,1\}} X_i \ni f \mapsto (f(0), f(1)) \in X_0 \times X_1$ が全単射を与える．

3. 省略．

演習問題 71 1. $F : X \to Y$, $X_0 \subset X_1 \subset X$ とする．$(F|X_1)|X_0 = F|X_0$ となることを示せ.

2. $A = \{0,1,2\} \subset \mathbb{N}$ として，$\chi_A : X \to \{0,1\}$ をその特性関数とする.
   (a) $\chi_A(0)$, $\chi_A(1)$, $\chi_A(2)$, $\chi_A(3)$ を求めよ.
   (b) 集合 $\{(x,y) \in \mathbb{N}^2 : \chi_A(x)\chi_A(y) = 1\}$ を具体的に求めよ.
   (c) 集合 $\{(x,x+1) \in \mathbb{N}^2 : \chi_A(x)\chi_A(x+1) = 1\}$ を具体的に求めよ.
3. $F(x) = \chi_A(x)\chi_{A^c}(x)$ は恒等的に値 0 をとることを示せ.
4. $F(x) = \chi_A(x) + \chi_{A^c}(x)$ は恒等的に値 1 をとることを示せ.
5. $A, B \subset X$ とする.

$$F(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}$$

   で関数 $F : X \to \{0,1\}$ を定める．F は $A \cup B$ の特性関数になることを示せ.
6. $X_0 = \{0,1\}$, $X_1 = \{2,3\}$ のとき，$\prod_{i=0,1} X_i$ に属する関数はいくつあるか.
7. $i = 0,1,2$ に対して, 集合 X_i は n_i 個の元を持つ(有限)集合とする．このとき, $\prod_{i\in\{0,1,2\}} X_i$ は何個の元を持つか.
8. $X^{Y\times Z}$ と $(X^Y)^Z$ の間に自然な全単射を作れ.

9. $A \cap B = \emptyset$ とする.
   (a) $X^A \cap X^B = \emptyset$ を示せ.
   (b) $X^A \cup X^B$ と $X^{A\cup B}$ の間に自然な全単射を作れ.
10. 実数列 $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ は $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ の元と見ることができることを確かめよ.

7 全順序集合

【復習】

- 擬順序：反射性＋推移性
- 順序：擬順序＋「$a \le b,\ b \le a \Rightarrow a = b$」.
- A 上の擬順序 $\le$ から同値関係 $\sim$ $(a \sim b \Leftrightarrow a \le b,\ b \le a)$ が定義される.
- $A/\sim$ に対して，自然に順序が定義できる.

今まで扱ってきた順序は, 必ずしも一列に並んだ順序ではない．一列に並んだ順序は全順序とよばれる.

7.1 全順序

定義 72 A 上の順序 $\le$ がさらに次の条件を満たすとき全順序とよばれる：

(*) 任意の $a, b \in A$ に対して, $a \le b$ または $b \le a$.

例 73 $\mathbb{R}$ 上の通常の大小関係は全順序である．集合間の包含関係は（一般には）全順序ではない.

定義 74 $(X, \le)$ を全順序集合として, $A \subset X, a \in X$ とする.

1. a が A の最大元 $\iff$ 「$a \in A$ かつ $\forall b \in A$, $b \le a$」．A の最大元は $\max A$ で表す.
2. a が A の最小元 $\iff$ 「$a \in A$ かつ $\forall b \in A$, $a \le b$」．A の最小元は $\min A$ で表す.
3. a が A の上界 $\iff$ $\forall b \in A,\ b \le a$．$A$ の上界全体の集合の最小元を上限とよび，$\sup A$ で表す.
4. a が A の下界 $\iff$ $\forall b \in A,\ a \le b$．$A$ の下界全体の集合の最大元を下限とよび，$\inf A$ で表す.
5. A に上界と下界が存在するとき，A は有界であるといわれる.

注意 75

1. 最大元，最小元，上界，下界，上限，下限は必ずしも存在するとは限らない.
2. 上限は最小上界と呼ばれることがある．また下限は最大下界と呼ばれることがある.
3. 最大元は上限である．しかし上限は最大元になるとは限らない．最小元は下限である．しかし下限は最小元になるとは限らない.

例 76

1. $(\mathbb{R}, \le)$ で考える．$A = (0, 1]$（0 と 1 の間の半開区間）とするとき, $\max A = 1$, $\min A$ は存在しない．$\sup A = 1$, $\inf A = 0$．1 以上のすべての元は A の上界である．0 以下のすべての元は A の下界である.
2. $(\mathbb{Q}, \le)$ で考える．$B = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x \le 1\}$ とする．$\max B = \sup B = 1$．$\min A$, $\inf A$ はともに存在しない（$-\sqrt{2}$ が $\mathbb{Q}$ に属さないことに注意）．しかし $-\sqrt{2}$ より小さな任意の有理数は B の下界になる.

7.2 順序の別の定義

今まで扱った順序は「等号付き」順序であった．すなわち数における以上以下の関係 $\le$ を一般化したものである.「等号なし」順序も定義することができる．これは $<$ を一般化した概念として定義される.

定義 77 X 上の 2 項関係 $\prec$ が X 上の等号なし順序であるとは，次が成立することである：

- $a \prec b,\ b \prec a$ となる $a, b \in X$ は存在しない.
- (推移性) 任意の $a, b, c \in A$ に対して，$a \prec b \prec c \Rightarrow a \prec c$.

定理 78 等号なし順序と等号付き順序は 1 対 1 に対応する.

証明： (1) 等号付きの順序集合 $(X, \le)$ に対して，$a < b$ なる関係を「$a \le b$ でかつ $a \ne b$」で定義すると，$(X, <)$ は等号なし順序集合になる．(2) 等号なし順序集合 $(X, <)$ に対し，$a \le b$ を「$a < b$ または $a = b$」とすると，$(X, \le)$ は等号付き順序集合になる．(1) の後に (2) を行うと元の順序集合に戻る.

注意 79 今後，順序といったときは，等号付きの意味でも等号なしの意味でも使う．しかし $\prec$ が順序であると言った場合は，等号なしの意味であり，$\preceq$ が順序であると言った場合は，等号付きの意味である.

定義 80 $(X, <)$ を順序集合とする．順序 $<$ が稠密であるとは，$a < b$ のときは必ず $a < c < b$ となる $c \in X$ が存在することである.

演習問題 81 1. $a = \sup A$, $a \le b$ ならば b は A の上界になることを示せ.

2. $\mathbb{R}$ の半開区間 $I = [0, 1)$ において $\max I$, $\min I$, $\sup I$, $\inf I$ はそれぞれ存在するか. またその値はいくつか.
3. 同じく $\mathbb{R}$ で考える. $X = \{1 - 1/n : n = 1, 2, ...\}$ において同様の質問に答えよ.
4. $X = \{a\}$ のとき, $\mathcal{P}(X)$ における包含関係は全順序を与えることを確かめよ.
5. X が 2 つ以上の元を持つとき, $\mathcal{P}(X)$ 上の包含関係は全順序にならないことを示せ.
6. $\mathbb{Q}$ を通常の順序で順序集合とみる. 上界を持つが上限を持たないような $A \subset \mathbb{Q}$ の例をあげよ.
7. 同じく $\mathbb{Q}$ で考える. $A, B \subset \mathbb{Q}$ にそれぞれ, 上限があるが, $A \cap B (\neq \emptyset)$ には上限が存在しない A, B の例を作れ.
8. 集合 $A \subset \mathbb{R}$ の上限は, 高々 1 個になることを示せ.
9. $(\mathbb{N}, <)$ は全順序集合であるが, $<$ は稠密ではない. これを確かめよ.
10. $(\mathbb{Q}, <)$ は稠密な全順序集合である. これを確かめよ.
11. 等号なし順序集合 $(X, <)$ が全順序集合であることはどう定義されるべきか.
12. 各項が 0 または 1 からなる有限列の全体を X とする. 例えば, 01100 は長さ 5 の X の元である. X に以下の順序を入れる.

$$x \le y \iff y \text{ は } x \text{ を延長した列である.}$$

例えば, $01 \le 01 < 010 < 0100$.
(a) $(X, \le)$ は全順序集合でないことを示せ.
(b) $a \in X$ に対して, $X_a = \{x \in X : x \le a\}$ とおく. $(X_a, \le)$ は全順序集合になることを示せ.

演習問題 82 1. $\prec$ を X 上の等号なし順序とする. このとき, X 上の 2 項関係 $\preceq$ を $a \preceq b \iff$ 「$a \prec b$ または $a = b$」で定義する. $\preceq$ が等号付き順序になることを示せ.

2. $\preceq$ を X 上の等号付き順序とする. このとき, X 上の 2 項関係 $\prec$ を $a \prec b \iff$ 「$a \preceq b$ かつ $a \neq b$」で定義する. $\prec$ が等号なし順序になることを示せ.
3. 等号なし順序 $\prec$ から等号付き順序を作り, さらにこれから等号なし順序を作ると, もとの $\prec$ に戻ることを示せ.

8　数の構成１

【数の構成】自然数の集合 $\mathbb{N}=\{0,1,2,...\}$ とその上の演算（加法，乗法）だけは知っているとして，整数の集合 $\mathbb{Z}$, 有理数の集合 $\mathbb{Q}$, 実数の集合 $\mathbb{R}$（とその上の演算）を順に定義してゆく．

【整数】 – 自然数から整数を作る．

0. $\mathbb{N}^2=\{(m,n):m,n\in\mathbb{N}\}$
1. $\mathbb{N}^2$ 上の 2 項関係 $\sim$ を
$$(m,n)\sim(m_1,n_1)\iff m+n_1=n+m_1$$
で定義する．このとき $\sim$ は同値関係になる．
2. $\mathbb{Z}=\mathbb{N}^2/\sim=\{[(m,n)]:(m,n)\in\mathbb{N}^2\}$ とする．ただし，$[(m,n)]$ は (m,n) の属する（$\sim$ に関する）同値類を表す．
3. $\mathbb{Z}$ 上に和と積を
   - $[(m,n)]+[(m_1,n_1)]=[(m+m_1,n+n_1)]$ で定義する．これは well-defined である．
   - $[(m,n)]\cdot[(m_1,n_1)]=[(m\cdot m_1+n\cdot n_1,m\cdot n_1+n\cdot m_1)]$ で定義する．これは well-defined である．
4. $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ を $\sigma(n)=[(n,0)]$ で定義する．これは単射であり，次の性質を持つ：
   - $\sigma(m+n)=\sigma(m)+\sigma(n)$，ただし左辺の $+$ は $\mathbb{N}$ における和で，右辺の $+$ は $\mathbb{Z}$ における和である．
   - $\sigma(m\cdot n)=\sigma(m)\cdot\sigma(n)$，ただし左辺の $\cdot$ は $\mathbb{N}$ における積で，右辺の $\cdot$ は $\mathbb{Z}$ における積である．
5. $\mathbb{N}$ と $\sigma(\mathbb{N})\subset\mathbb{Z}$ を同一視することにより，$\mathbb{N}$ の拡大として $\mathbb{Z}$ を作ることができた．

演習問題 83　1. $\sim$ が $\mathbb{N}^2$ 上の同値関係になることを示せ．

2. $[(m,n)]=[(m_1,n_1)]\iff m+n_1=n+m_1$ を示せ．
3.
   - $\mathbb{Z}$ 上の和が well-defined になることを示せ．
   - $\mathbb{Z}$ 上の積が well-defined になることを示せ．
4.
   - σ が単射になることを示せ．
   - $\sigma(m+n)=\sigma(m)+\sigma(n)$ を示せ．
   - $\sigma(m\cdot n)=\sigma(m)\cdot\sigma(n)$ を示せ．
5. $\mathbb{N}$ と $\sigma(\mathbb{N})$ はどうして同一視できるのか説明せよ．
6. $\mathbb{Z}$ 上の順序はどのように定義したらよいか．
7. $\mathbb{Z}$ において，和は可換（和の順番を変えても値が同じ）なことを示せ．また積も可換なことを示せ．
8. $\mathbb{Z}$ において，和と積に関する分配法則が成立することを示せ．
9. $\mathbb{Z}$ において，$a+0=0+a=a$ （$\forall a\in\mathbb{Z}$）が成立することを確かめよ．（ただし，$0=[(0,0)]=\sigma(0)$）
10. $\mathbb{Z}$ において，$a\cdot 1=1\cdot a=a$ （$\forall a\in\mathbb{Z}$）が成立することを確かめよ．
11. $\mathbb{Z}$ において，任意の $a\in\mathbb{Z}$ に対して，$a+b=b+a=0$ となる $b\in\mathbb{Z}$ が唯一つ存在することを示せ．

9　数の構成２

【有理数】 – 整数から有理数を作る

0. $A=\{(a,b):a\in\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\}$
1. A 上の 2 項関係 $\sim$ を
$$(m,n)\sim(m_1,n_1)\iff m\cdot n_1=n\cdot m_1$$
で定義する．このとき $\sim$ は同値関係になる．
2. $\mathbb{Q}=A/\sim=\{[(m,n)]:(m,n)\in A\}$ とする．
3. $\mathbb{Q}$ 上に和と積を
   - $[(m,n)]+[(m_1,n_1)]=[(m\cdot n_1+n\cdot m_1,n\cdot n_1)]$ で定義する．これは well-defined である．
   - $[(m,n)]\cdot[(m_1,n_1)]=[(m\cdot m_1,n\cdot n_1)]$ で定義する．これは well-defined である．
4. $\tau:\mathbb{Z}\to\mathbb{Q}$ を $\tau(n)=[(n,1)]$ で定義する．これは単射であり，次の性質を持つ：
   - $\tau(m+n)=\tau(m)+\tau(n)$，ただし左辺の $+$ は $\mathbb{N}$ における和で，右辺の $+$ は $\mathbb{Z}$ における和である．
   - $\tau(m\cdot n)=\tau(m)\cdot\tau(n)$，ただし左辺の $\cdot$

は $\mathbb{N}$ における積で，右辺の $\cdot$ は $\mathbb{Z}$ における積である．

5. $\mathbb{Z}$ と $\tau(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Q}$ を同一視することにより，$\mathbb{Z}$ の拡大として $\mathbb{Q}$ を作ることができた．

演習問題 84 $\mathbb{Q}$ 上の順序はどのように定義すべきか．またその順序が稠密（$a < b \Rightarrow (\exists c) a < c < b$ ）になることを示せ．

10　数の構成３

【実数の構成】 – 有理数から実数を作る

定義 85 $\mathbb{Q}$ の点列 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がコーシー列であるとは次が成立すること：$\forall p \in \mathbb{Q}^+, \exists n \in \mathbb{N}, \forall m_1, m_2 \in \mathbb{N}$

$$m_1, m_2 \geq n \Rightarrow |a_{m_1} - a_{m_2}| < p.$$

演習問題 86 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ がコーシー列ならば，その部分列もコーシー列になることを示せ．

コーシー列全体の集合を $\mathcal{C}$ とかく．

1. $\mathcal{C}$ 上の同値関係 $\sim$ を以下で定義する：
   $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \sim \{b_n\}_{n=0}^{\infty} \iff \forall p \in Q^+ \ \exists n \in \mathbb{N}$ $\forall m_1, m_2 \in \mathbb{N} \ (m_1, m_2 \geq n \Rightarrow |a_{m_1} - b_{m_2}| < p)$.
2. $\mathbb{R} = \mathcal{C}/\!\sim = \{[\{a_n\}_{n=0}^{\infty}] : \{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{C}\}$.
3. $\mathbb{R}$ 上に和，積，順序を入れる．
   - $[\{a_n\}_{n=0}^{\infty}] + [\{b_n\}_{n=0}^{\infty}] = [\{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}]$
   - $[\{a_n\}_{n=0}^{\infty}] \cdot [\{b_n\}_{n=0}^{\infty}] = [\{a_n \cdot b_n\}_{n=0}^{\infty}]$
   - $[\{a_n\}_{n=0}^{\infty}] \leq [\{b_n\}_{n=0}^{\infty}]$
     $\iff \forall p \in \mathbb{Q}^+, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, \ [n \geq m \Rightarrow a_n < b_n + p]$
4. $\sigma : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ を $a \in \mathbb{Q}$ に対して，すべての項が a である数列 $\{a\}_{n=0}^{\infty}$ を対応させる関数とする．
   - σ は単射である．
   - $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$ が成り立つ．
   - $\sigma(a \cdot b) = \sigma(a) \cdot \sigma(b)$ が成り立つ．
   - $a \leq b \iff \sigma(a) \leq \sigma(b)$ が成り立つ．

演習問題 87

1. $\sim$ が同値関係になることを確かめよ．
2. $\mathbb{R}$ の和と積が well-defined であることを確かめよ．
3. $\mathbb{R}$ における $\leq$ が順序になることを確かめよ．
4. また $\leq$ が全順序になることを確かめよ．
5. 方程式 $x^2 = 2$ の解が $\mathbb{R}$ に存在することを示せ．