# 完全性定理

Akito Tsuboi

June 22, 2006

## 1 はじめに

「論理」とは状況によらず成立する普遍的推論方法のことである．完全性定理は,「論理」というものを完全に具体的に記述できることを主張する．

公理 $T$ を仮定して命題 $\varphi$ を証明することを考える．おそらく多くの人の頭の中では次のような思考を行っていると思われる．まず $T$ を満たす数学的対象 $M$ を思い浮かべる．その $M$ の上で，議論を進めてゆき，$\varphi$ が $M$ で成立していることを確かめる．思い浮かべる $M$ によらず $\varphi$ が成立していれば, $T$ から $\varphi$ が推論されたことになる．完全性定理は，このような推論は具体的な何種類かの推論の組み合わせで達成できることを主張する．

この講義では論理を対象に数学的議論を行う．その数学的議論自体ももちろん論理を使うので，研究対象としての論理と議論をするための論理とを区別する必要がある．対象としての論理を形式的な体系として定義する．論理のうち，任意や存在の概念があらわれない比較的簡単な論理を形式的に定義したものが，命題論理である．命題論理は弱い体系なので，数学をそこで展開することは不可能である．しかし，対象としての論理に慣れるためにはこれを学ぶことは重要である．

これに対して，述語論理は「任意の... に対して...」という形の命題を表現する論理記号 $\forall$ や「... を満たす... が存在する」を表現するための論理記号 $\exists$ を持ち，数学を表現するために十分な強さを持っている．

## 2 命題論理

命題論理について述べる．

**Definition 1** $X, Y, Z, ....$ を命題を表す変数として用意する．命題論理の論理式は，次のように帰納的に定義される：

*1.* 命題変数 $X, Y, Z, \ldots$ はどれも命題論理の論理式である．

*2.* $A$, $B$ が命題論理の論理式のとき，

$$\neg(A),\ (A) \wedge (B),\ (A) \vee (B),\ (A) \to (B)$$

は命題論理の論理式である．

**Exercise 2** 次の記号列が命題論理の論理式になることを確かめよ．

*1.* $(X) \vee (Y)$

*2.* $((X) \vee (Y)) \wedge (Z)$

*3.* $\neg(((X) \vee (Y)) \wedge (Z))$

**Exercise 3** $((X) \vee (Y)) \wedge (\wedge(Z))$ は命題論理の論理式にならないことを示せ．

**Remark 4** 命題論理の論理式の構成において括弧 (, ) は，どのようにしてその式ができあがったかを知るために必要である．もし括弧がないと，$X \vee Y \wedge Z$ は $X \vee Y$ と $Z$ に対して $\wedge$ を使って得られたものか，$X$ と $Y \wedge Z$ の間に $\vee$ を用いて得られたのかの判断ができなくなってしまう．しかし，一番内側の括弧は省略しても構成をたどることができるので，それは省略してもよい．

命題論理の論理式 $A$ が与えられたとする．いま $A$ の中の命題変数は $X, Y, \ldots$ として，各変数に真理値 true(値 1) または false（値 0）が与えられたとき，$A$ に対して真理値をつけることを考える．論理記号 $\wedge$ は「かつ（and)」，$\vee$ は「または（or)」，$\neg$ は「否定 (not)」の意味となるように定義するためには，次のように定めるのが妥当である．

$A$ が $X \wedge Y$ のとき，$A$ の真理値 $= \begin{cases} 1 & X = 1 \text{ and } Y = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

論理記号 $\wedge$ は 2 変数関数と思えることに注意する．また真理値の割り当てを表で，

| $X$ | $\wedge$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

とかき，$\wedge$ の真理値表とよぶ．同様に関数としての $\vee$, $\neg$, $\to$ を

| $X$ | $\vee$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

,

| $\neg$ | $X$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

,

| $X$ | $\to$ | $Y$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

で定義する．命題論理の論理式は論理記号を有限回使って構成されている．関数の合成により命題論理の論理式も命題変数への $0, 1$ の割り当てに対して，値 $0, 1$ を対応させる関数と考えることができる．

$(X \vee Y) \to Z$ に対して表をかいて調べてみる．

| $(X$ | $\wedge$ | $Y)$ | $\to$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

**Definition 5** *$X$,$Y$,...* の真偽の定め方によらず，$\varphi$ が常に真になるとき，$\varphi$ をトートロジー *(tautology)* とよぶ．例えば，$X \ \vee \ (\neg X)$ はトートロジーである．

**Exercise 6** $(\neg(\neg X)) \ \to \ (X)$ がトートロジーになることを表を書いて示せ．

**Remark 7** トートロジーは，命題変数部分の真偽によらず，全体としては正しいと判断できるものである．したがって，そのトートロジーに現れる命題変数の部分に，どんな数学的命題（正しかろうが誤っていようが）を代入してやっても常に正しいと判断されるはずである．後にこれらが述語論理における公理となる．

**Remark 8** 命題変数 $X, Y, ..$ からできた命題論理の論理式がトートロジーであるか否かは，具体的に（あるいは機械的に）判断できる．それは，表を見ればよいからである．

# 3 述語論理

## 3.1 言語と論理式

われわれが今後展開する理論においては，記号は単なる記号であり，それらに固有の意味はない．意味はその記号に期待される性質を記述することにより後から出現する．

最初に我々が使う記号をいくつかに分類する．

**言語：** 数学で使う記号のうち，定数記号，関数記号，述語記号に注目する．これらからなる一つの集合を固定して，それを言語とよぶ．
それぞれの記号は定数記号か，関数記号か，述語記号なのかは指定されているとする．また関数記号，述語記号の場合は何変数かも指定されているとする．言語は $L$,$L'$,... などであらわす．
**変数記号：**次に変数記号の集合を一つ固定しておく．これらは，$x$,$y$,$z$,$x_0$,$x_1$,... などである．
**論理記号：**$\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\forall$, $\exists$ および $=$.

これらの他に補助記号として括弧（(,),[,] など）を用いる．

**Definition 9** (項) $L$ を言語とする．$L$ の項は次のように帰納的に定義される．

0. 変数記号と $L$ に属する定数記号はすべて $L$ の項である．

1. $t_1, ..., t_n$ がすべて $L$ の項で，$F \in L$ が $n$ 変数の関数記号ならば，$F(t_1, ..., t_n)$ は $L$ の項である．

2. 以上によって項とわかるものだけが $L$ の項である．

通常上のような帰納的な定義においては，条件 2 は省略される．

**Example 10** $L = \{c, F\}$ とする．ただし，$c$ は定数記号，$F$ は 2 変数関数記号である．このとき，

$$x, c, F(x, c), F(x, F(x, c)), F(F(x, c), F(x, c)), ...$$

などは $L$ の項の例である．

**Definition 11** (原子論理式)

1. $t$ と $s$ が $L$ の項のとき，記号列 $t = s$ は $L$ の原子論理式である．

2. $t_1, ..., t_n$ がすべて $L$ の項で，$P \in L$ が $n$ 変数の述語記号ならば，$P(t_1, ..., t_n)$ は $L$ の原子論理式である．

**Example 12** $L = \{c, F, * < *\}$ とする．ただし，$c$ は定数記号，$F$ は 2 変数関数記号，$* < *$ は 2 変数述語記号である．このとき，

1. $F(x, c) = y$,
2. $F(x, y) < F(F(x, y), c)$

などは原子論理式の例である．

$L$ の項 $t$ の中に現れる変数記号が $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，$t$ を $t(x_1, ..., x_n)$ とかくことがある．このとき，$x_1, ..., x_n$ の中のすべての変数が実際に $t$ の中に使われている必要はない．例えば，上の例の $F(x, c)$ を $t$ であらわすとき，$t$ は $t(x)$ とか $t(x, y)$ と書いてもよい．

**Definition 13** (論理式) $L$ を言語とする．$L$ の論理式（$L$-論理式）は次のように帰納的に定義される．

0. $L$ の原子論理式は $L$ の論理式である．
1. $\varphi, \psi$ が $L$ の論理式で $x$ が変数ならば，

$$\neg(\varphi),\ (\varphi) \wedge (\psi),\ (\varphi) \vee (\psi),\ (\varphi) \rightarrow (\psi),\ \forall x(\varphi), \exists x(\varphi)$$

はすべて $L$ の論理式である．

$L$-論理式 $\varphi$ の中に，変数 $x$ があらわれていて，なおかつこの $x$ に作用しているような $\forall x$ または $\exists x$ があるとき，この $x$ を束縛（された）変数という．束縛されていない変数は自由変数とよぶ．たとえば $\varphi$ が $(\forall x(F(x, y) = x)) \wedge (F(x, x) = z)$ のとき，$\wedge$ の前に出てくる $x$ は $\forall x$ で束縛された変数だが，後半の $x$ は自由変数である．$\varphi$ の中の自由変数がすべて $x_1, ..., x_n$ に含まれるとき，$\varphi$ のことを $\varphi(x_1, .., x_n)$ とかくことがある．また，このとき $\varphi$ は $n$ 変数論理式とよばれる．

**Definition 14** （閉論理式）論理式 $\varphi$ の中に自由変数がないとき，$\varphi$ を閉論理式とよぶ．

## 3.2　論理の公理

理論と論理という二つの字面の似た言葉がある．この二つは実は全く異なるものである．非常に簡単に説明すれば，理論は「知識」のことであり，論理は「考え方（思考の法則)」のことである．誤解を恐れずに，単刀直入に述べれば，理論は人によって異なるかも知れないが,（幸いにも）論理は人類共通のものである．それどころか，論理は機械にも教えることが可能である．それを説明してゆく．

われわれの述語論理の体系（形式的な論理の体系）は「論理の公理」と「推論規則」の二つの部分からなる．論理の公理は「考え方」のもとになる誰もが普遍的に正しい[1] と判断する「命題」のことである．推論は文字通り「考え方」（あるいは論法）である．論理の公理には３種類ある：

- 命題論理の公理；
- 論理記号（$\forall, \exists$）の公理；
- 等号（＝）に関する公理.

最初に命題論理の公理について述べる.

## 3.3　命題論理の公理

各トートロジー $A$ において，その中に現れる命題変数 $X$,$Y$,... の部分を言語 $L$ の論理式で置き換えたものを作り，これらすべてを集めて来たものを**命題論理の公理**という.

**Example 15** $X \vee (\neg X)$ はトートロジーである．また，$(\forall x)(x = x)$ は（$L$ の）論理式なので，$X$ をこの論理式で置き換えて得られる

$$(\forall x)(x = x) \vee (\neg(\forall x(x = x)))$$

は命題論理の公理となる．また，$X$ の部分を $(\exists x)P(x)$ で置き換えれば,

$$(\exists x)P(x) \vee (\neg(\exists x)P(x))$$

が得られるが，これも命題論理の公理である.

[1]命題 $1 + 1 = 2$ は通常我々は正しいと判断するが，これは普遍的に正しい命題ではない．正しいと思うのは１や２に対する知識（理論）による．我々の形式的体系は「論理」の体系，すなわち「考え方，推論の仕方」の体系です．知識を無視し，どんな状況で考えても成り立つ命題の中から具体的に何種類かを選んで論理の公理にする.

**Remark 16** トートロジーは，命題変数部分の真偽によらず，全体としては正しいと判断できるものである．したがって，そのトートロジーに現れる命題変数の部分に，どんな論理式を代入してやっても常に正しいと判断される論理式ができるはずである．これらを集めてきて公理としたわけである．

**Remark 17** 命題変数 $X, Y, ..$ からできた命題論理の論理式がトートロジーであるか否かは，具体的に（あるいは機械的に）判断できる．それは，真理値表を作ればよいからである．したがって，それらトートロジーから出来た「命題論理の公理」に関しても，

- 与えられた，言語 $L$ の論理式が,「命題論理の公理」になるか否かは具体的に決定できる．

と考えられる．

## 3.4 論理記号の公理

最初に，変数記号の種類に関する定義が必要である．

**Definition 18** 論理式 $\varphi$ の中に現れる変数記号 $x$ を考える．$x$ が $\varphi$ の中で,自由変数とは $\forall x$ や $\exists x$ の形が $\varphi$ の中に現れないこととする．また，$\forall x$ または $\exists x$ の形が $\varphi$ の中に現れるとき，その $x$ は $\varphi$ の中で束縛変数とよばれる．

**Example 19** *1.* 論理式 $(\exists x)(x = y)$ において，$x$ は束縛変数，$y$ は自由変数である．

*2.* $[(\forall x)(x = x)] \wedge [(\exists y)(x = y)]$ において，$\wedge$ の左側に現れる $x$ はその前の $\forall x$ によって束縛されているが，$\wedge$ の右側の $x$ は自由変数である．$\forall x$ の力は右側までは到達していない．

自由変数か束縛変数は，本当はその表れる場所まで考えなければならない．

論理記号の公理は 2 種類の公理からなる（それぞれ無限個ある）．

**論理記号 $\forall, \exists$ の公理**

1. $(\forall x)(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\psi)$

   の形をした論理式全体．ただし，$\varphi$ の中に変数 $x$ は自由変数として現れない．

2. $(\forall x)\varphi(x, y, ...) \to \varphi(t, y, ...)$

   の形の論理式全体．ただし，$t$ は項であり，$t$ の中に変数が現れるとき，その変数は $\varphi(t, y, ...)$ の中で束縛されない．($\forall$ や $\exists$ がかかってこない.)

**Remark 20**
- *1,2* において，もちろん変数 $x$ だけでなく変数 $y, z, ...$ に対して同様の形の論理式は公理に入っている．

- 存在記号（$\exists$）に対しても，同様な公理を導入しても構わないが，本講義においては（簡単のため）$\exists x$ は $\neg\forall x\neg$ の省略形と見る．

- *1* での変数条件（$\varphi$ に $x$ が自由変数として現れない）は重要である．変数条件を無視すると

$$\forall x(x = 1 \to x = 1) \ \to \ (x = 1 \to \forall x(x = 1)$$

  も公理に入ってしまう．しかし $\to$ の左辺は直感的に正しいが，右辺は「$x = 1$ ならば何でも（$y$ でも $z$ でも）*1* に等しい」ことを主張しているので正しいとは考えられない．

- *2* の直感的な意味は「どんな $x$ に対しても成り立つならば，どんな物 $t$ で置き換えても成り立つ」ということ．これはいつでも成り立つと思うかもしれないが，変数の条件（代入しても束縛されない）は重要である．例えば，論理式 $\varphi(x)$ を

$$(\exists y)[x = y]$$

  とする．論理式 $(\forall x)\varphi(x)$ に対応する命題は明らかに普通の自然数の世界で正しいと判断される．しかし，$\varphi(x)$ の中の $x$ に項 $y + 1$ を代入してみると，$(\exists y)[y + 1 = y]$ となる．これは，どう見ても成り立ちそうにない．

## 3.5 等号の公理

**等号（=）の公理** $x, y$ が変数で $t(u_0, ...., u_n)$ が変数 $u_0, ..., u_n$ を持つ項．$\varphi(u_0, ..., u_n)$ が自由変数 $u_0, ..., u_n$ を持つ原始論理式とする．このとき，次は公理：

1. $x = x$;

2. $x = y \to t(x, u_1, ..., u_n) = t(x, u_1, ..., u_n)$;

3. $x = y \to [\varphi(x, u_1, ..., u_n) \to \varphi(y, u_1, ..., u_n)]$.

**Exercise 21** *3* の公理の形は，$\varphi$ が原始論理式でない場合は，一般には正しいとは思われない．論理式 $x = y \to [(\exists y)(x = y + 1) \to (\exists y)(y = y + 1)]$ をもとに考えよ．

# 4　推論規則と証明

推論規則は二つだけである：

1. (Modus Ponens) $\varphi$ と $\varphi \to \psi$ から $\psi$ を推論する；
2. (Generalization) $\varphi$ から $(\forall x)\varphi$ を推論する．

我々の体系における形式的な証明の概念を定義する：

**Definition 22** 論理式の有限列 $\varphi_0, ...., \varphi_n$ は次の条件を満たすとき「証明」と呼ばれる：各 $i \leq n$ に対して，$\varphi_i$ は次のいずれかになっている．

*1.* $\varphi_i$ が論理の公理である．

*2.* $\varphi_i$ はそれ以前の番号を持つ $\varphi_j$ から一般化によって得られる．すなわち $\varphi_i$ は $\forall x \varphi_j$ の形 $(j < i)$.

*3.* $\varphi_i$ はそれ以前の番号を持つ $\varphi_j$ と $\varphi_k$ により *Modus Ponens* によって得られる．すなわち $\varphi_k$ は $\varphi_j \to \varphi_i$ の形（$j, k < i$）.

「証明」の最後が論理式 $\psi$ のとき，この「証明」を「$\psi$ の証明」という．

**Example 23** 言語 $L$ の中に 1 変数述語記号 $P$ が含まれるとする．このとき，$P(x) \to (\exists y)P(y)$ は以下のように「証明」される．最初に $(\exists y)P(y)$ は $\neg\forall y(\neg P(y))$ の省略形であることに注意する．したがって，$P(x) \to \neg\forall y(\neg P(y))$ を「証明」すればよい．

$$\forall y(\neg P(y)) \to \neg P(x)$$

は $\forall$ の公理である．また，命題論理の論理式 $(X \to \neg Y) \to (Y \to \neg X)$ はトートロジーである．よって，$X$ に $\forall y(\neg P(y))$, $Y$ に $P(y)$ を代入した論理式

$$(\forall y(\neg P(y)) \to \neg P(x)) \to (P(x) \to \neg\forall y(\neg P(y))$$

は命題論理の公理である．よってこれら二つの論理式に *Modus Ponens* を適用すれば，$P(x) \to \neg\forall y(\neg P(y))$ が得られる．

**Remark 24** いわゆる三段論法は $\varphi \to \psi$ と $\psi \to \theta$ から $\varphi \to \theta$ を推論するものである．三段論法は我々の推論規則には入っていないが，我々が定義した「論理」の中でも許される推論である．それは次が言えるからである．

- 「$\varphi \to \psi$ の証明」と「$\psi \to \theta$ の証明」がともに存在するとき,「$\varphi \to \theta$ の証明」が存在する．

証明：$(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \theta) \to (\varphi \to \theta)]$ は命題論理の公理（*tautology*）である．これと $\varphi \to \psi$ とから，*Modus Ponens* を使うと，

$$(\psi \to \theta) \to (\varphi \to \theta)$$

が「証明」される．この論理式と $\psi \to \theta$ に再び *Modus Ponens* を使えば，$\varphi \to \theta$ が「証明」される．

**Exercise 25** $\forall x P(x) \to \exists y P(y)$ を「証明」せよ．

以上において，証明という単語を「証明」と書いてきたが，これは我々の「論理」(＝「論理の公理」＋「推論規則」）という「形式的な体系」の中で証明できるという意味を強調したかったからである．以下では，一々このような括弧はつけないが，証明という言葉が二つの意味で使われることに注意されたい．例えば

- 論理式 $\varphi$ が証明されることを証明する．

というのは,『最後が $\varphi$ で終わる形式的体系での「証明」がある』という事実を日本語で証明（説明）するという意味である.「証明」であることを強調したいときは，証明の代わりに証明図という言葉を用いることがある．また，論理式 $\varphi$ の証明があることを

$$\vdash \varphi$$

とかく．この記号のもとで，推論規則は,

1. $\vdash \varphi, \ \vdash \varphi \to \psi \ \Rightarrow \ \vdash \psi$;
2. $\vdash \varphi \Rightarrow \vdash (\forall x)\varphi$

と表現することができる．ただし，$\Rightarrow$ は日本語「ならば」の省略である．

**Definition 26** (仮定のある証明) $\Gamma$ を閉論理式の集合，$\varphi$ を論理式とする．論理式の列 $\varphi_0, ..., \varphi_n$ が「$\Gamma$ を用いた $\varphi$ の証明」であるとは，各 $i \le n$ に対して，$\varphi_i$ が次のいずれかになっていることである．

1. $\varphi_i$ が論理の公理である．

2. $\varphi_i \in \Gamma$.

3. $\varphi_i$ はそれ以前の番号を持つ $\varphi_j$ から一般化によって得られる．すなわち $\varphi_i$ は $\forall x \varphi_j$ の形 $(j < i)$.

4. $\varphi_i$ はそれ以前の番号を持つ $\varphi_j$ と $\varphi_k$ により Modus Ponens によって得られる．すなわち $\varphi_k$ は $\varphi_j \to \varphi_i$ の形（$j, k < i$）.

「$\Gamma$ を用いた $\varphi$ の証明」があるとき，$\Gamma \vdash \varphi$ と記号でかく．

**Remark 27**

- $\vdash \varphi$ は $\Gamma = \emptyset$ のときの $\Gamma \vdash \varphi$ と考えることができる．
- $\Gamma \vdash \varphi$ ならば $\Gamma$ の有限部分集合 $\Gamma_0$ で $\Gamma_0 \vdash \varphi$ となるものがある：$\Gamma \vdash \varphi$ より，最後が $\varphi$ で終わる，$\Gamma$ を用いた証明 $\varphi_0, ..., \varphi_n, \varphi$ がある．これは有限列なので，その中に現れる $\Gamma$ の元は有限個．それらを $\Gamma_0$ とすればよい．

**Lemma 28** $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \theta \iff \Gamma \vdash \varphi \to \theta$

*Proof*: $\Leftarrow$: $\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ とする．その証明を $\varphi_0, ..., \varphi_n, (\varphi \to \theta)$ とする．このとき，列

$$\varphi, \varphi_0, ..., \varphi_n, (\varphi \to \theta), \theta$$

は $\Gamma \cup \{\varphi\}$ からの $\theta$ の証明となる．$\Rightarrow$: $\Gamma \cup \{\varphi\}$ での $\theta$ の証明の長さ $n$ に関する帰納法で証明する．$n = 1$ のときは，$\theta$ 自体が論理の公理かまたは，$\theta \in \Gamma \cup \{\varphi\}$．$\theta$ が論理の公理や $\Gamma$ に属す場合は $\varphi \to \theta$ は明らかに $\Gamma$ で証明可能である．$\theta$ が $\varphi$ の場合も $\varphi \to \theta$ は $\varphi \to \varphi$ なので $\Gamma$ で証明可能である．

$n + 1$ の場合．最後の推論が Modus Ponens のときを考えよう．

$$\frac{\psi \quad \psi \to \theta}{\theta}$$

が $\Gamma \cup \{\varphi\}$ における証明の最後の部分とする．帰納法の仮定から

$$\Gamma \vdash \varphi \to \psi, \quad \Gamma \vdash \varphi \to (\psi \to \theta).$$

がともに成立．また $(\varphi \to \psi) \to ((\varphi \to (\psi \to \theta)) \to (\varphi \to \theta))$ はトートロジーなので，Modus Ponens を 2 回用いて，$\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ を得る．最後の推論が Generalization のときを考える．$\theta$ は $\forall x \psi$ の形で，証明の最後の部分は

$$\frac{\psi}{\forall x \, \psi}$$

の形をしている．$\psi$ の証明の長さは $n$ 以下なので，帰納法の仮定により，$\Gamma \vdash \varphi \to \psi$ が成立する．ここで Generalization を用いると $\Gamma \vdash \forall x(\varphi \to \psi)$ を得る．一方 $\varphi$ は閉論理式なので，$\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$ は $\forall$ の公理の一つである．したがって，Modus Ponens を使うと，$\Gamma \vdash \varphi \to \forall x\psi$ を得る．

**Proposition 29** $\Gamma$ を閉論理式の集合，$\varphi(x)$ を論理式とする．また定数記号 $c$ が $\Gamma$ の中の論理式に現れないと仮定する．このとき，

$$\Gamma \vdash \varphi(c) \quad \Rightarrow \quad \Gamma \vdash (\forall x)\varphi(x)$$

である．

*Proof*： 最初に「$\Gamma \vdash \varphi(x) \iff \Gamma \vdash (\forall x)\varphi(x)$」に注意する．$\Gamma \vdash \varphi(c)$ を仮定して，$\Gamma \vdash \varphi(x)$ を示す．したがって,「$\Gamma$ からの証明」の中に現れる推論の数に関する帰納法で証明すればよい.

**Case 0.** 一回も推論を用いていないとき.

- $\varphi(c) \in \Gamma$ ならば,（$\Gamma$ に $c$ は現れないから），$\varphi(x)$ と $\varphi(c)$ は同一の論理式で，$\varphi(x) \in \Gamma$．したがって，任意に関する推論（generalization）により，$\Gamma \vdash (\forall x)\varphi(x)$ を得る．

- $\varphi(c)$ が論理の公理ならば，トートロジーからできたものでも，$\forall,\exists$ に関するものでも，$=$ に関するものでも，すべて $\varphi(x)$ も論理の公理になる．

**Case 1.** 最後の推論が

- Modus Ponens のとき：適当な $\psi(c)$ によって，$\Gamma \vdash \psi(c) \to \varphi(c), \Gamma \vdash \psi(c)$ がともに成立している．ここで帰納法の仮定により，$\Gamma \vdash \psi(x), \Gamma \vdash \psi(x) \to \varphi(x)$．よって，これらに Modus Ponens を使えば，$\Gamma \vdash \varphi(x)$ を得る．

- Generalization のとき：$\varphi(x)$ は $(\forall y)\psi(x,y)$ の形で，証明の最後は $\psi(c,y)$ から $(\forall y)\psi(c,y)$ を推論している．$\Gamma \vdash \psi(c,y)$ に対して帰納法の仮定を用いると，$\Gamma \vdash \psi(x,y)$．これに Generalization を用いれば，$\Gamma \vdash (\forall y)\psi(x,y)$ を得る．

**Exercise 30** 次を示せ：$c$ を $\Gamma$ に現れない新しい定数記号とする．このとき，$\varphi_0(c), ...., \varphi_n(c)$ が $\Gamma$ からの証明ならば $\varphi_0(x), ...., \varphi_n(x)$ も $\Gamma$ からの証明である．ただし $x$ は今までに現れていない新しい変数.

# 5 構造

論理式はあくまでも記号の列であり，固有の意味は持たない．意味を与えるのは構造である．

以下で $\alpha$,$\beta$... などは順序数を表す.

**Definition 31** （構造）$L = \{c_i : i < \alpha\} \cup \{F_i : i < \beta\} \cup \{P_i : i < \gamma\}$ を言語とする．ただし，$c_i$ は定数記号，$F_i$ は $m_i$ 変数の関数記号，$P_i$ は $n_i$ 変数述語記号とする．次の条件を満たす対

$$(M; \{c_i^M\}_{i<\alpha}, \{F_i^M\}_{i<\beta}, \{P_i^M\}_{i<\gamma})$$

を一つの $L$-構造とよぶ：

1. $M \neq \emptyset$
2. $c_i^M \in M \ (i < \alpha)$
3. $F_i^M$ は $M^{m_i}$ から $M$ への関数 $(i < \beta)$
4. $P_i^M \subset M^{n_i} \ (i < \gamma)$

$c_i^M$ を定数記号 $c_i$ の $M$ における解釈とよぶ．同様に $F_i^M$ は関数記号 $F_i$ の解釈，$P_i^M$ を述語記号 $P_i$ の解釈とよぶ．$M$ を上の構造のユニバース（領域）とよぶ.

**Remark 32** *1.* 定数記号は名前の示すとおり定数（特定の元）を表すための記号であるから，構造では実際特定の元に解釈されている．同様に関数記号は関数をあらわすための記号であり，構造ではまさに関数に解釈されているわけである．述語記号の場合は，少し注意を要する．述語記号の解釈は述語記号を成り立たせたい元全体として解釈されているわけである．たとえば実数の世界において $<$ の「通常の」解釈は $\{(x, y) \in \mathbb{R} : x < y\}$ になっている.

*2.* 言語の解釈を明示する必要がないとき（あるいは面倒なとき）ユニバース $M$ だけを示して，構造とよぶ．しかし我々の立場で構造という場合は言語の解釈の部分も本来は明示すべきである．たとえば，実数の集合 $\mathbb{R}$ を考えるとき，構造 $(\mathbb{R}, 0., 1, +, \cdot)$ と $(\mathbb{R}, 0, 1, +, \cdot, <)$ とはまったく異なるものとして扱う．前者は体としての実数構造であり，後者は順序体としの実数構造である.

*3.* $L = \{0, 1, +, \cdot\}$ を言語として，$\mathbb{R}$ を $L$-構造にする方法は１つでない．０は実数の０と解釈して，１は１に解釈，$+$ は和を与える関数，$\cdot$ は積を与える関数に解釈するのが普通ではあるが，たとえば，０を実数の１と解釈しても我々の意味では $L$-構造になる.

次はまったく常識的な定義である．$L$ の項 $t$ は帰納的に構成されていた．したがって，項 $t$ の $M$ においての値も $t$ がいかに構成されたかに従って帰納的に定義される：

**Definition 33** (項の解釈) $M$ を $L$-構造とする．$L$ の項 $t(x_1,...,x_n)$ と $a_1,...,a_n \in M$ に対して，「$t$ に $a_1,...,a_n$ を代入した値」（$t^M(a_1,...,a_n)$）を帰納的に左辺を右辺で定義する:

0. (a) $t$ が変数 $x_i$ のときのとき，

$$t^M(a_1,...,a_n)=a_i.$$

(b) $t$ が定数記号 $c$ のとき，

$$t^M(a_1,...,a_n)=c^M.$$

1. $t$ が $F(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))$（$F$ は関数記号，$t_i$ たちは項）のとき，

$$t^M(a_1,...,a_n)=F^M(t_1^M(a_1,...,a_n),...,t_m^M(a_1,...,a_n)).$$

**Definition 34** （論理式の解釈）$M$ を $L$-構造，$a_1,...,a_n \in M$ とし，$\varphi=\varphi(x_1,...,x_n)$ を $L$-論理式とする．「$M$ で $\varphi(a_1,...,a_n)$ が成立する」（$M \models \varphi(a_1,...,a_n)$）という関係を帰納的に定義する．

*1.*
- $\varphi$ が原始論理式 $t(x_1,...,x_n)=u(x_1,...,x_n)$ のときは，

$$M\models\varphi(a_1,...,a_n) \iff t^M(a_1,...,a_n)=u^M(a_1,...,a_n).$$

- $\varphi$ が原始論理式 $P(t_1(x_1,...,x_n),...,t_m(x_1,...,x_n))$ のときは，

$$M\models\varphi(a_1,...,a_n) \iff (t_1^M(a_1,...,a_n),...,t_m^M(a_1,...,a_n))\in P^M.$$

*2.*
- $\varphi$ が $\varphi_1(x_1,...,x_n)\wedge\varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，

$$M\models\varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M\models\varphi_1(a_1,...,a_n)\,\text{かつ}\,M\models\varphi_2(a_1,...,a_n)\text{”}.$$

- $\varphi$ が $\varphi_1(x_1,...,x_n)\vee\varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，

$$M\models\varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M\models\varphi_1(a_1,...,a_n)\,\text{または}\,M\models\varphi_2(a_1,...,a_n)\text{”}.$$

- $\varphi$ が $\varphi_1(x_1,...,x_n) \to \varphi_2(x_1,...,x_n)$ のとき，

  $M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff$ "$M \models \varphi_1(a_1,...,a_n)$ ならば $M \models \varphi_2(a_1,...,a_n)$".

- $\varphi$ が $\neg\psi(x_1,...,x_n)$ のとき，

  $$M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff \text{“}M \models \varphi(a_1,...,a_n)\text{ でない”}.$$

- $\varphi$ が $\exists x\psi(x,x_1,...,x_n)$ のとき，

  $M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff$ "適当な $b \in M$ に対し $M \models \psi(b,a_1,...,a_n)$".

- $\varphi$ が $\forall x\psi(x,x_1,...,x_n)$ のとき，

  $M \models \varphi(a_1,...,a_n) \iff$ "任意の $b \in M$ に対し $M \models \psi(b,a_1,...,a_n)$".

**Example 35** *1.* $M$ を *2* 次実正則行列の全体 *(*$GL_2(\mathbb{R})$*)* とする．*2* 変数関数記号 $\cdot$ の $M$ での解釈 $\cdot^M$ を通常の行列の乗法として，$M$ を $\{\cdot\}$-構造とする．$(M,\cdot^M) \models \exists x\exists y(x\cdot y \neq y\cdot x)$ である．

*2.* 上の $M$ において $\cdot^M$ の解釈を行列の和とすれば，$(M,\cdot^M) \models \forall x\forall y(x\cdot y = y\cdot x)$ である．

*3.* $L = \{\cdot\}$ とする．実数の全体 $\mathbb{R}$ と有理数の全体 $\mathbb{Q}$ を自然な解釈で $L$-構造とする．$L$-閉論理式 $\varphi$ を

$$\forall x\exists y(x = y\cdot y)$$

とすれば，$\mathbb{R} \models \varphi$ だが $\mathbb{Q} \models \neg\varphi$ となる．

**Exercise 36** $M$ を $L$-構造 $M$ とする．

*1.* $c \in L$ を定数記号，$P \in L$ を 1 変数述語記号とする．このとき，

$$M \models P(c) \iff M \models P(c^M).$$

ヒント：両辺とも $c^M \in P^M$ と同等.

*2.* $\varphi(x_1,...,x_n)$ を $L$-論理式，$t_1,...,t_n$ を $L$ の閉項（変数のない項）とする．このとき，次が成立する：

$$M \models \varphi(t_1,...,t_n) \iff M \models \varphi(t_1^M,...,t_n^M).$$

**Definition 37** $M$ を $L$-構造として，$\varphi$ を $L$-閉論理式とする．$M \models \varphi$ のとき，$M$ は $\varphi$ のモデルという．また $T$ が $L$-閉論理式の集合の場合，$M$ がすべての $\varphi \in T$ のモデルになるとき,（$M \models T$ とかき）$M$ は $T$ のモデルであるという．

**Remark 38** モデルという言葉を強いて日本語に直せば「具体例」という語感かも知れない.「$M$ が $\varphi$ のモデルである」とは,「構造 $M$ は論理式 $\varphi$ を成り立たせる具体例である」という意味．モデルという言葉を使うと完全性は次のように表現できる．

- 我々の「形式的体系」で証明できない閉論理式 $\varphi$ に対しては，$\neg\varphi$ のモデルが存在する．
- （同じことだが）我々の「形式的体系」で $\neg\varphi$ が証明できなければ，$\varphi$ のモデルが存在する．

# 6 形式的体系の復習

論理の形式的体系は以下のものからなる：

1. 命題論理の公理：トートロジーから作られる論理式全体；
2. 論理記号の公理：次の二つの形
   - $\forall x(\varphi \to \psi) \ \to \ (\varphi \to \forall x\psi)$
     $\varphi$ の中に自由変数 $x$ が現れない．
   - $\forall x\varphi(x, ...) \ \to \ \varphi(t, ...)$
     $t$ は項で $t$ の変数は $\varphi$ の中で束縛されない．
3. 等号の公理
4. 推論規則：次の二つの形：

$$\frac{\varphi \qquad \varphi \to \psi}{\psi} \text{ (Modus Ponens)} \qquad \frac{\varphi}{\forall x\psi} \text{ (Generalization)}$$

**Remark 39** *1.* 上の公理をもとに推論規則を何回か使って論理式 $\varphi$ が出てくるとき $\varphi$ は証明可能であるといい，$\vdash \varphi$ で表す．$\Gamma$ を論理式の集合とする．上の公理以外に $\Gamma$ も公理として用いて，$\varphi$ が証明可能のとき $\Gamma \vdash \varphi$ とかく．

*2.* 存在 $\exists$ は $\neg\forall\neg$ の省略形と考える．すなわち，$\exists x\varphi$ という論理式は論理式 $\neg(\forall x(\neg\varphi))$ のことである．

形式的体系の性質の中で（今までの中で）最も重要な結果は次である：

**Proposition 40** $\Gamma$ を閉論理式の集合として，定数記号 $c$ が $\Gamma$ の中の論理式に現れないと仮定する．$\varphi_1(c,\bar{x}),...,\varphi_n(c,\bar{x})$ が $\Gamma$ を使った証明のとき，$\varphi_1(c,\bar{x}),...,\varphi_n(c,\bar{x})$ の中の $c$ を新しい変数 $z$ （$\varphi_1,...,\varphi_n$ に現れないで変数）で置き換えた $\varphi_1(z,\bar{x}),...,\varphi_n(z,\bar{x})$ とすれば，この列も証明である．特に

$$\Gamma\vdash\varphi(c) \quad\Rightarrow\quad \Gamma\vdash\varphi(x)$$

である．ここで，$x$ は $\Gamma\vdash\varphi(c)$ の証明中に現れない変数.

# 7 完全性の証明の準備

**Definition 41** *1.* $\Gamma$ を $L$ の閉論理式の集合とする．$\Gamma$ が矛盾しているとは，$\Gamma$ から $\psi$ と $\neg\psi$ の両方が証明可能となる $\psi$ が存在すること.（$\psi\to((\neg\psi)\to\theta))$ は論理の公理だから，$\Gamma$ が矛盾していれば，任意の $L$-論理式 $\theta$ が証明可能になる.）

*2.* $\Gamma$ が整合的（*consistent*）とは，$\Gamma$ が矛盾していないことをいう.

**Lemma 42** $\varphi$ を $L$-閉論理式とする.

*1.* $\Gamma\cup\{\varphi\}\vdash\theta\Rightarrow\Gamma\vdash\varphi\to\theta$

*2.* $\Gamma\cup\{\varphi\}$ が矛盾するならば，$\Gamma\vdash\neg\varphi$ である.

*Proof*： 1. $\Gamma\cup\{\varphi\}$ での $\theta$ の証明の長さ $n$ に関する帰納法で証明する．$n=1$ のときは，$\theta$ 自体が論理の公理かまたは，$\theta\in\Gamma\cup\{\varphi\}$．$\theta$ が論理の公理や $\Gamma$ に属す場合は $\varphi\to\theta$ は明らかに $\Gamma$ で証明可能である．$\theta$ が $\varphi$ の場合も $\varphi\to\theta$ は $\varphi\to\varphi$ なので $\Gamma$ で証明可能である.

$n+1$ の場合．最後の推論が Modus Ponens のときを考えよう.

$$\frac{\psi \quad \psi\to\theta}{\theta}$$

が $\Gamma\cup\{\varphi\}$ における証明の最後の部分とする．帰納法から $\Gamma\vdash\varphi\to\psi$, $\Gamma\vdash\varphi\to(\psi\to\theta)$. がともに成立．$(\varphi\to\psi)\to(\varphi\to(\varphi\wedge\psi))$ はトートロジーなので，$\Gamma\vdash\varphi\to\psi$ から次が言える.

$$\Gamma\vdash\varphi\to(\varphi\wedge\psi).$$

同様の議論で，

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \to \theta.$$

以上の二つから三段論法を使えば，$\Gamma \vdash \varphi \to \theta$ がわかる．最後の推論が Generalization のときも同様の議論である．

2. $\Gamma \cup \{\varphi\}$ が矛盾することから，$\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ となる．1 を適用すると，$\Gamma \vdash \varphi \to \neg\varphi$．ここで $(\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi$ はトートロジーなので，$\Gamma \vdash \neg\varphi$ を得る．

**Theorem 43** （完全性定理［基本形］）$\Gamma$ を言語 $L$ の閉論理式のある集合とする．$\Gamma$ が整合的ならば $\Gamma$ のモデルが存在する．

証明の基本方針は次のようになる：

1. $L$ は簡単のため可算言語とする．
2. 可算無限個の新しい定数記号 $c_i$（$i \in \mathbb{N}$）を用意し $L$ に加えて，新しい言語 $L^* = L \cup \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ を作る．
3. $\Gamma$ を $L^*$-閉論理式の集合と考える．$L^*$ においても $\Gamma$ は整合的である．
4. $\Gamma$ を（包含関係に関して）極大な整合的な $L^*$-論理式の集合 $\Gamma^*$ に拡大する．
5. $\Gamma^*$ を使って $L^*$-構造 $M^*$ を定義する．
6. $M^* \models \Gamma^*$ を示す．
7. $M^*$ をもとの言語 $L$ に制限した構造を $M$ とする．$M \models \Gamma$ となる．

# 8　完全性（定理 43）の証明

$L$ を可算言語として $\Gamma$ を $L$ で書かれた閉論理式の整合的な集合とする．$L$ に入っていない可算個の新しい定数記号たち $C = \{c_i : i \in \mathbb{N}\}$ を用意する．

$$L^* = L \cup C$$

とおく．

**Remark 44** $\varphi(x, \bar{y})$ が自由変数 $x, \bar{y}$ を持つ $L$ の論理式ならば，$\varphi(c_i, \bar{y})$ は $L^*$ の論理式となる．

**Claim A** Γ は新しい言語 $L^*$ でも整合的になっている．

もし，$L^*$ での矛盾にいたる証明があったとする．証明の途中に $\varphi(c_1, ..., c_n, \bar{y})$ の形の（$\varphi(x_1, ..., x_n, \bar{y})$ は $L$ の論理式）論理式が現れる．このとき命題 40 により，論理式中の $c_1, ..., c_n$ たちの部分を証明に現れない新しい変数 $z_1, ..., z_n$ で置き換えたものは $L$ での矛盾にいたる証明になる．

## 8.1 $\Gamma^*$ の構成

$L^*$ の論理式のうち自由変数がちょうど $x$ になっているものたちは可算個ある．これらを一列に並べたものを

$$\{\varphi_i(x) : i \in \mathbb{N}\}$$

とする．並び方を工夫することにより，$\varphi_i(x)$ の中に現れる $C$ の元は $c_0, ..., c_{i-1}$ に含まれるようにできる．$L^*$ の閉論理式からなる集合たち $\Gamma_n$ $(n \in \mathbb{N})$ を以下のように定める．

$$\Gamma_n = \Gamma \cup \{\exists x(\varphi_i(x)) \to \varphi(c_i) : i < n\}.$$

**Claim B** 各 $\Gamma_n$ は整合的である．

他の場合も同様なので $n = 1$ の場合を扱う.（正確には $n$ に関する帰納法で証明する.）$\Gamma_1 = \Gamma \cup \{\exists x(\varphi_i(x)) \to \varphi_i(c_i)\}$ が整合的でないとする．補題 42 を使うと，

$$\Gamma \vdash \neg[\exists x(\varphi_0(x)) \to \varphi_0(c_0)]$$

がわかる．ところで，$\neg[\exists x(\varphi_0(x)) \to \varphi_0(c_0)]$ から $\exists x(\varphi_0(x)) \wedge \neg\varphi_0(c_0)$ は何の仮定もなしに証明できるので，結局

$$\Gamma \vdash \exists x(\varphi_0(x)) \quad \text{かつ} \quad \Gamma \vdash \neg\varphi(c_0)$$

が示される．後半部分に命題 40 を使えば（$c_0$ が Γ に現れないことに注意），

$$\Gamma \vdash \forall x(\neg\varphi_0(x)).$$

これと前半部分 $\Gamma \vdash \exists x(\varphi_0(x))$ から Γ が整合的でないことが示される．矛盾．(Claim B の証明終)

$$\Gamma_\omega = \bigcup_{n\in\omega} \Gamma_n$$

とおく．$\Gamma_\omega$ は $L^*$ において整合的である．次に $\Gamma_\omega$ を極大な（$L^*$ での）整合集合 $\Gamma^*$ に拡大する.（Zorn の補題によりそのような極大集合は存在する.）

**Claim C** $\varphi$ が $L^*$ の閉論理式ならば，$\varphi \in \Gamma^*$ または $(\neg\varphi) \in \Gamma^*$ のいずれか一方が成り立つ.

$\Gamma^*$ の整合性から両方が成立することはない．もし，両方が成り立たなければ，$\Gamma^*$ の極大性から，$\Gamma^* \cup \{\varphi\}, \Gamma^* \cup \{\neg\varphi\}$ の両方とも矛盾する．補題 42 により，

- $\Gamma^* \vdash \neg\varphi$;
- $\Gamma^* \vdash \neg(\neg\varphi)$.

これは $\Gamma^*$ が矛盾することを意味する．矛盾.（Claim C の証明終）

**Remark 45** $\Gamma^*$ は形式的体系の帰結で閉じている．すなわち，$L^*$-閉論理式 $\varphi$ に対して，

$$\Gamma^* \vdash \varphi \implies \varphi \in \Gamma^*$$

特に $\varphi$ と $\varphi \to \psi$ がともに $\Gamma^*$ に属せば，$\psi$ も $\Gamma^*$ に属す.

## 8.2 $M^*$ の構成

次に $\Gamma^*$ から $L^*$-構造 $M^*$ を作る．最初に $L^*$ の閉項（変数を持たない項）全体の集合 $Term$ 上に関係 $\sim$ を導入する：

$$t \sim u \iff t = u \in \Gamma^*$$

**Claim A** $\sim$ は同値関係である.

推移性を示せばよい．$t_1, t_2, t_3$ を $Term$ の元として，$t_1 \sim t_2$, $t_2 \sim t_3$ とする．定義から $(t_1 = t_2), (t_2 = t_3) \in \Gamma^*$ である．このとき，等号に関する公理から

$$\Gamma^* \vdash (t_1 = t_2 \wedge t_2 = t_3) \to t_1 = t_3$$

が示される．よって，$\Gamma^* \vdash t_1 = t_3$．Remark 45 により，$t_1 \sim t_3$.（Claim D の証明終）

**Remark 46** 同値類 $[t]$ の代表元として $C$ の元がとれる：$t \in Term$ のとき，$\exists x(t = x)$ は $L^*$ の論理式．したがって，$\exists x(t = x) \to t = c_n$ の形の論理式が $\Gamma^*$ に入っている．ところが，仮定部分 $\exists x(t = x)$ は $\Gamma^*$ に属する．よって，$t = c_n \in \Gamma^*$ となる．すなわち $[t] = [c]$.

求める構造 $M^*$ のユニバース（同じ名前で $M^*$ とよぶ）を最初に定義する：

$$M^* = Term/\sim = \{[t] : t \in Term\}$$

とする．ただし，$[t]$ は $t$ の同値類．次に $L^*$ に属する記号の解釈を決める．$c \in L^*$ は定数記号，$P \in L^*$ は $n$ 変数述語記号，$F \in L^*$ は $n$ 変数関数記号とするとき，

- $c^{M^*} = [c]$,
- $P^{M^*} = \{([t_1], ..., [t_n]) \in (M^*)^n : P(t_1, ..., t_n) \in \Gamma^*\}$,
- $F^{M^*}([t_1], ..., [t_n]) = [t] \iff (F(t_1, ..., t_n) = t) \in \Gamma^*$.

これらの定義が well-defined なことに注意する．

## 8.3 $M^*$ が $\Gamma^*$ のモデルになること

**Claim A** $L^*$ の論理式 $\varphi$ に対して

$$M^* \models \varphi \iff \varphi \in \Gamma^*.$$

$\varphi^*$ に属する論理記号 $\wedge, \vee, \to, \neg, \forall, \exists$ の数 $n$ に関する帰納法で証明する．

**Case 0:** $n = 0$ のときは，$\varphi$ は原始論理式．したがって，$P(t_1, ..., t_n)$ または $t = u$ の形．前者については，上の $P^{M^*}$ の定義から

$$M^* \models P(t_1, ..., t_n) \iff ([t_1], ..., [t_n]) \in P^{M^*} \iff P(t_1, ..., t_n) \in \Gamma^*.$$

$t = u$ の場合も同様.

**Case n+1:** $\varphi$ の構成に際して最後に使った論理記号によって場合わけをする．$\varphi$ が $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ のとき，

$$\begin{array}{llll} M^* \models \varphi_1 \wedge \varphi_2 & \iff & M^* \models \varphi_1 \text{ かつ } M^* \models \varphi_2 & \text{（}\wedge\text{ の解釈）} \\ & \iff & \varphi_1 \in \Gamma^* \text{ かつ } \varphi_2 \in \Gamma^* & \text{（帰納法仮定）} \\ & \iff & \varphi_1 \wedge \varphi_2 \in \Gamma^* & \text{（}\Gamma^*\text{ は論理的帰結で閉）} \end{array}$$

残りの $\vee, \rightarrow, \neg$ についても同様である．問題は，存在記号 $\exists$ と全称記号 $\forall$ の場合．$\varphi$ が $\forall x\psi(x)$ の場合を考える．

$$M^* \models \forall x\psi(x) \iff \forall x\psi(x) \in \Gamma^*$$

を示す．$\Rightarrow$: $\forall x\psi(x) \notin \Gamma^*$ とする．$\Gamma^*$ の極大性により，$\neg\forall x\psi(x) \in \Gamma^*$ である．よって，$\exists x\neg\psi(x) \in \Gamma^*$ である．$\neg\psi(x)$ は自由変数 $x$ を持つ $L^*$ の論理式なので，$\Gamma_n$ の構成に現れた論理式の並べ方 $\{\varphi_i(x)\}_{i\in\mathbb{N}}$ の何番目かに必ず現れているはず．いま $\neg\psi(x)$ が $n$ 番目の論理式 $\varphi_n(x)$ だったとする．

$$\exists x\neg\psi(x) \rightarrow \neg\psi(c_n)$$

が $\Gamma^*$ に属する．したがって，再び $\Gamma^*$ の極大性により，$\neg\psi(c_n) \in \Gamma^*$ である．したがって帰納法の仮定により，$M^* \models \neg\psi(c_n)$．よって $M^* \models \exists x\neg\psi(x)$ となる．すなわち $M^* \not\models \forall x\psi(x)$ を得る．

$\Leftarrow$: $\forall x\psi(x) \in \Gamma^*$ とする．このとき，$\Gamma^*$ が形式的な帰結で閉じていることから，任意の閉項 $t \in Term$ に対して，$\psi(t) \in \Gamma^*$ である．帰納法の仮定により，$M^* \models \psi(t)$ $(\forall t \in Term)$ である．$[t]$ の全体が $M^*$ なので $M^* \models \forall x\psi(x)$ を得る．

### 8.4 $M^*$ の制限 $M$

$M^*$ は $\Gamma^*$ のモデルとなる $L^*$-構造であった．すなわち，$L \cup C$ に属する記号の解釈を与える構造

$$(M^*, P^{M^*}, F^{M^*}, c^{M^*}, c_0^{M^*}, c_1^{M^*}, ...)$$

で $\Gamma^*$ を成り立たせるモデルだった．ここで，$C$ の解釈は忘れて，$L$ の部分の解釈だけに注目する：

$$(M^*, P^{M^*}, F^{M^*}, c^{M^*})$$

この $L$-構造を $M$ とおく．$\Gamma \subset \Gamma^*$ であり，$\Gamma$ は $L$ の閉論理式の集合だったから，$M$ は $\Gamma$ のモデルになっている．(完全性の証明終わり)

## 9 完全性定理の応用

最初に次の命題を示す.

**Lemma 47** $\varphi(\bar{x})$ を $L$-論理式とする．このとき，

1. $\vdash \varphi(\bar{x})$ ならば全ての $L$-構造 $M$ において，$M \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$.
2. また $T \vdash \varphi$ のときは，$T$ のすべてのモデル $M$ において $M \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ となる．

*Proof*: 形式的体系における公理はすべて（$\forall$ で束縛した形が）$M$ で成立し，形式的体系における推論規則はすべて正しい推論だから，この推論規則は $M$ の上でも使える．したがって，形式的体系で証明できる論理式は $M$ で成立する．

後半部分は以下のように示される．$T \vdash \varphi(\bar{x})$ のときは，$\psi_1, ..., \psi_m \in T$ を選んで，$\vdash \psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m \to \varphi(\bar{x})$ とできる．したがって，$\forall \bar{x}(\psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m \to \varphi)$ が任意の $L$-構造 $M$ で成立する．$M$ が特に $T$ のモデルならば，$M \models \psi_1 \wedge ... \wedge \psi_m$ なので，$M \models \forall \bar{x} \varphi(\bar{x})$ となる．

**Remark 48** 命題の事実を形式的体系の「健全性」ということがある．

**Definition 49**

**Definition 50** $T$ を $L$-閉論理式の一つの集合．$\varphi$ を $L$-閉論理式とする．任意の $L$-構造 $M$ に対して，

$$M \models T \Rightarrow M \models \varphi$$

が成立するとき，$T \models \varphi$ とかく．$T = \emptyset$ のときは，単に $\models \varphi$ とかく．

**Theorem 51** （完全性定理の別表現）上の記法のもとで，

$$T \models \varphi \iff T \vdash \varphi.$$

*Proof*: 健全性より ($\Rightarrow$) は明らかである．

($\Leftarrow$): $T \vdash \varphi$ でないとする．このとき，$\Gamma = T \cup \{\neg\varphi\}$ は整合的になる (補題 42)．したがって，完全性定理により $\Gamma$ のモデル $M$ が存在する．このとき $M \models T$ だが $M \models \neg\varphi$．したがって，$T \models \varphi$ ではない．

**Theorem 52** （コンパクト性定理）$T$ を $L$-閉論理式の一つの集合とする．このとき次は同値である：

1. $T$ はモデルを持つ；

*2.* $T$ の任意の有限部分集合 $T_0$ はモデルを持つ．

*Proof*： $1 \Rightarrow 2$ は自明である．$2 \Rightarrow 1$: 対偶を示す．1 でないとする．完全性定理により，$T$ は整合的でない．すなわち，$T$ から形式的体系を使って矛盾（$\psi \wedge (\neg\psi)$）を導くことができる．形式的体系における証明は有限の長さなので，矛盾にいたる証明の中で使われている $T$ の元（論理式）は有限個．それらを $T_0 = \{\psi_1, ..., \psi_m\}$ とすれば，その証明は $T_0$ から矛盾を導く証明になっている．健全性により，$T_0$ はモデルを持たない．これは 2 の否定が成立することを意味する．

**Example 53** （超準モデル）$L = \{0, 1, 2, ..., +, \cdot, <\}$ として，自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ を自然に $L$-構造とみる．$\mathbb{N}$ と論理式では区別がつかないが $\mathbb{N}$ と同型ではない $M$ が存在する：

$\mathbb{N}$ で成立する $L$-閉論理式全体を $T$ とする．$c$ を新しい定数記号として，

$$T^* = T \cup \{c > 0, c > 1, c > 2, c > 3, ....\}$$

とおく．$T^*$ の任意有限部分 $T_0$ がモデルを持つことを示す．$T_0$ は

$$T_0 = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\} \cup \{c > 0, ...., c > n\}$$

の形と思ってよい．ただし $\varphi_i \in T$ である．このとき $\mathbb{N} \models \varphi_1 \wedge ... \wedge \varphi_m$ である．また $c$ の解釈を $n+1$ とすれば，$\mathbb{N} \models c > 1 \wedge ... \wedge c > n$ も成立する．コンパクト性定理により，$T^*$ のモデル $M$ が成立する．$M \models T$ なので，$M$ と $\mathbb{N}$ は $L$-閉論理式では区別できない．しかし，$M$ は無限大の元（$c^M$）を持つので，$\mathbb{N}$ と同型でない．

**Definition 54** $\mathcal{C}$ を $L$-構造の一つのクラスとする．$\mathcal{C}$ が初等的クラスであるとは，次が成立する $T$（$L$-閉論理式の集合）が存在することである：任意の $L$-構造 $M$ に対して，

$$M \in \mathcal{C} \iff M \models T.$$

**Example 55** $L$ を群の言語 $\{e, * \cdot *, *^{-1}\}$ とする．

*1.* 群の全体（群になる $L$-構造全体）$\mathcal{G}$ は初等的クラスである．実際 $T$ として群の公理（論理式でかけることに注意）をとればよい．

*2.* 有限群の全体 $\mathcal{F}$ は初等的クラスではない：背理法で示す．$T$ が $\mathcal{F}$ を規定したとする．すなわち次が成立する：$(*)$ $M$ が有限群 $\iff M \models T$．次に $T^*$ を，

$$T^* = T \cup \{\theta_n : n = 1, 2, ...\}$$

とする．ただし，$\theta_n$ は元が $n$ 個以上存在することを主張する閉論理式である．明らかに，$T^*$ の各有限部分はモデルを持つ．したがってコンパクト性により，$T^*$ 全体にもモデルが存在する．$G \models T^*$ とする．このとき $G$ は $T$ を満たす無限群となり，$(*)$ に反する．

**Remark 56** 上の例と同じ論法で，次が証明できる．$L$ を一般の言語とする．有限 $L$-構造全体のクラスは初等的クラスではない．

**Theorem 57** *(Löwenheim-Skolem)* 次は同値である．

1. $T$ は無限モデルを持つ；
2. $T$ は任意に大きい無限モデルを持つ．(任意の無限基数 $\kappa$ に対して，$|M| \geq \kappa$ となる $M \models T$ が存在する．)

*Proof*： $1 \Rightarrow 2$ を示せばよい．$\kappa$ 個の新しい定数記号 $\{c_i : i < \kappa\}$ を用意して，

$$T^* = T \cup \{c_i \neq c_j : i < j < \kappa\}$$

とする．$T^*$ の有限部分

$$T_0 = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\} \cup \{c_{i_1}, ..., c_{i_n} \text{ は異なる }\}$$

を考える．ただし，$\varphi_i \in T$ である．$N \models T$ を無限モデルとする．$d_1, ..., d_n \in N$ を異なる元とする．$N$ に $c_{i_j}^N = d_j$ なる解釈を付け加えた構造を $N'$ とすれば，

$$N' \models T_0.$$

コンパクト性により，$T^*$ のモデル $M^*$ が存在する．$T^* \supset T$ により，$M^* \models T$．また $c_i$ たちの解釈をすべて含み，それらはすべて異なるので，$M^*$ の大きさは $\kappa$ 以上である．

**Remark 58** 上の定理は通常 *Upward Löwenheim-Skolem* の定理と言われる．濃度を大きく（上向きに）できるという意味である．

# 10 コンパクト性定理の応用例 - 超準解析

$\mathbb{R}$ を実数の構造とする．ここで，言語を増やすことを考える．すなわち，

- 各 $r \in \mathbb{R}$ に対して，定数記号 $c_r$ を用意する．

- 各関数 $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対して，関数記号 $F_f$ を用意する．
- 各集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ に対して，述語記号 $P_X$ を用意する．

$\mathbb{R}$ はこの言語 $L$ の構造と見ることができる．すなわち，$c_r^{\mathbb{R}}$ は $r$ 自身，${F_f}^{\mathbb{R}}$ も $f$ 自身，${P_X}^{\mathbb{R}}$ も $X$ 自身と解釈する．

$$T = \{\varphi : \mathbb{R} \models \varphi,\ \varphi \text{ は } L\text{-閉論理式}\}$$

とする．もちろん，$\mathbb{R}$ は $T$ のモデルである．ここで $c$ を新しい定数記号として，

$$T^* = T \cup \{c \neq 0\} \cup \{|c| < c_r : r \in \mathbb{R},\ r > 0\}$$

とする．$c$ は $0$ でないが，どんな正の実数よりも絶対値が小さいという主張を $T$ に付け加えている．

**Claim A** $T^*$ の有限部分 $T_0$ は常にモデルを持つ．

$T_0 = \{\varphi_1, ..., \varphi_m\} \cup \{c \neq 0\} \cup \{|c| < r_1, ..., |c| < r_n\}$ としてよい．ただし，$r_i$ たちは正の実数である．ここで，$d = \min\{r_1, ..., r_n\}/2$ として，$c$ の解釈を $d$ とすれば，$\mathbb{R}$ は $T_0$ のモデルとなる．(Claim の証明終わり)

したがって，コンパクト性定理により，$T^*$ のモデル $\mathbb{R}^*$ が存在する．$T \subset T^*$ だから,，$\mathbb{R}$ で成立するすべての $L$-閉論理式が $\mathbb{R}^*$ 上でも成立する．$\mathbb{R}^*$ を使って $\mathbb{R}$ の性質を調べる手法を超準解析という．

**Lemma 59** $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}^*$ に埋め込める．この埋め込みにより $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ と思う．

*Proof*: $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ を $\sigma(r) = {c_r}^{\mathbb{R}^*}$ で定義する．$m$ 変数関数記号 $F_f \in L$ に対して，

$$\begin{aligned}
\mathbb{R} \models F_f(r_1, ..., r_m) = s \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R} \models F_f(c_{r_1}, ..., c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad F_f(c_{r_1}, ..., c_{r_m}) = c_s \in T \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(c_{r_1}, ..., c_{r_m}) = c_s \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f({c_{r_1}}^{\mathbb{R}^*}, ..., {c_{r_m}}^{\mathbb{R}^*}) = {c_s}^{\mathbb{R}^*} \\
&\Longleftrightarrow \quad \mathbb{R}^* \models F_f(\sigma(r_1), ..., \sigma(c_{r_m})) = \sigma(s).
\end{aligned}$$

述語記号に対しても同様の同値性が証明できる．したがって，$\sigma$ は $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}^*$ の中に同型に埋め込んでいる． 上の補題により，$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ と考える．また関数 ${F_f}^{\mathbb{R}^*}$ は $f$ の拡張になる．${F_f}^{\mathbb{R}^*}$ を以下では $f^*$ と略記する．同様に集合 $X \subset \mathbb{R}^m$ の拡大となる ${P_X}^{\mathbb{R}^*}$ は $X^*$ とかく．$a \in \mathbb{R}^*$ が任意の $r \in \mathbb{R}, r > 0$ よりも小さいとき，$a$ を無限小とよぶ．$c$ の解釈 $c^{\mathbb{R}^*}$ は $0$ でない無限小である．また，$2c^{\mathbb{R}^*}, 3c^{\mathbb{R}^*}$,... などはすべて無限小である．したがって，$\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ と論理式では区別できないが,（$0$ でない）無限小を持つ構造となる．$\mathbb{R}^*$ の元を超実数という．

**Remark 60** $\mathbb{N}^* \neq \mathbb{N}$ である．$\mathbb{R} \models \forall x \exists y \in \mathbb{N}(y < x < y+1)$ であるから，$\mathbb{R}^* \models \forall x \exists y \in \mathbb{N}^*(y < x < y+1)$ である．$d = 1/c$ は無限大の元である．この $d$ に対して，

$$\mathbb{R}^* \models n^* < d < n^* + 1$$

となる $n^* \in \mathbb{N}^*$ が存在する．$n^* \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ である．またそれは無限大の自然数となる．

**Definition 61** $a, b \in \mathbb{R}^*$ に対して，$a - b$ が無限小となるとき，$a \approx b$ とかく．

**Proposition 62** $a \in \mathbb{R}$ とする．関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して次は同値である．

1. $f$ は $a$ において連続である．
2. 任意の無限小 $\varepsilon$ に対して，$f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a)$

*Proof*： $1 \Rightarrow 2$: $f$ が $a$ で連続とする．各自然数 $n \neq 0$ に対して，

$$\mathbb{R} \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f(x) - f(a)| < 1/n)$$

を満たす実数 $\delta_n > 0$ が存在する．$\mathbb{R}^*$ においても同じ論理式が成立する．すなわち，

$$\mathbb{R}^* \models \forall x(|x-a| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(a)| < 1/n).$$

ここで $x$ に $a+\varepsilon$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |(a+\varepsilon) - a| < \delta_n \to |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n.$$

仮定部分 $|(a+\varepsilon) - a| < \delta_n$ は成立するので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a+\varepsilon) - f^*(a)| < 1/n$$

が任意の $n$ に対して成立することになる．このことは $f^*(a+\varepsilon) \approx f^*(a)$ を意味する．

$2 \Rightarrow 1$: $f$ が $a$ で連続でないとする（1 でないとする）．このとき，$\epsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}\,[\ |g(x) - a| < 1/x \ \wedge\ |f(g(x)) - f(a)| > \epsilon\ ]$$

となるものが存在する．$\mathbb{R}^*$ においても同様の性質が成立する：

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*\,[\ |g^*(x) - a| < 1/x \ \wedge\ |f^*(g^*(x)) - f^*(a)| > \epsilon\ ]$$

$x$ に無限大の自然数 $b \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(b) - a| < 1/b \ \wedge \ |f^*(g^*(b)) - f^*(a)| > \epsilon$$

を得る．このとき，$|g^*(b) - a| < 1/b < r$ $(\forall r \in \mathbb{R}, r > 0)$ なので，$g^*(b) - a$ は無限小．しかし，$f^*(g^*(b)) - f^*(a)$ は無限小ではない．よって 2 は成立しない．

**Proposition 63** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対して，次は同値である．

1. $f$ は一様連続である．

2. 任意の $a, b \in \mathbb{R}^*$ に対して，

$$a \approx b \Rightarrow f^*(a) \approx f^*(b).$$

*Proof*： $1 \Rightarrow 2$: 1 を仮定する．各 $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対して，$\delta_n \in \mathbb{R}^+$ を以下のように選ぶ．

$$\mathbb{R} \models \forall x, y(|x - y| < \delta_n \to |f(x) - f(y)| < 1/n).$$

同じ論理式は $\mathbb{R}^*$ でも成立する．すなわち，

$$\mathbb{R}^* \models \forall x, y(|x - y| < \delta_n \to |f^*(x) - f^*(y)| < 1/n).$$

$a, b \in \mathbb{R}^*$ を $a \approx b$ なる元とする．このとき，

$$\mathbb{R}^* \models |a - b| < \delta_n \to |f^*(a) - f^*(b)| < 1/n$$

が任意の $n$ に対して成立．しかし仮定部分は成立しているので，

$$\mathbb{R}^* \models |f^*(a) - f^*(b)| < 1/n$$

が $n = 1, 2, ..$ でなりたつ．これは $f^*(a) \approx f^*(b)$ を示す．

$2 \Rightarrow 1$: 1 でないとする．このとき，$\epsilon > 0$ と関数 $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ で，

$$\mathbb{R} \models \forall x \in \mathbb{N}[|g(x) - h(x)| < 1/x \wedge |f(g(x)) - f(h(x))| > \epsilon]$$

が成立するものがある．よって，

$$\mathbb{R}^* \models \forall x \in \mathbb{N}^*[|g^*(x) - h^*(x)| < 1/x \wedge |f^*(g^*(x)) - f^*(h^*(x))| > \epsilon].$$

$k \in \mathbb{N}^* \setminus \mathbb{N}$ を $x$ に代入すると，

$$\mathbb{R}^* \models |g^*(k) - h^*(k)| < 1/k \wedge |f^*(g^*(k)) - f^*(h^*(k))| > \epsilon.$$

$1/k < 1/n$ $(n = 1, 2, ...)$ が成立することに注意．このとき，$a = g^*(k)$, $b = h^*(k)$ とおけば，$a \approx b$, $f^*(a) \not\approx f^*(b)$ がわかる．

**Exercise 64** 1. $a \in R^*$ が有限の超実数（$\mathbb{R}^* \models |a| < n$ となる自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在する）ならば，$a \approx b$ となる $b \in \mathbb{R}$ が存在する．

2. $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ は有界閉区間で定義された連続関数とする．このとき，$f$ は一様連続となることを示せ．