トポロジーB

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回　('25年10月8日：Keywords $\cdots$ 単体・単体分割)

2.1　空間の分割 (幾何 part)

実は、位相空間からホモロジーを計算するのは難しい。空間を単純化 (あるいは近似) することで単体複体が得られる。次の流れによる。

$$\text{位相空間} \rightsquigarrow \text{単体複体} \rightsquigarrow \text{胞体複体}$$

特徴

- 単体複体 $\cdots$ 定義は理解しやすいが、計算しにくい
- 胞体複体 $\cdots$ 定義は理解しにくいが、計算しやすい

定義 2.1 (ユークリッド空間の単体)**.** ベクトル $v_0, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$ が $\{\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_0 \mid i = 1, \cdots, n\}$ が一次独立であるとして、

$$\sigma = \langle v_0 v_1 \cdots v_n \rangle = \{t_0 \boldsymbol{v}_0 + \cdots + t_n \boldsymbol{v}_n \mid \sum_{k=0}^{n} t_k = 1, t_k \geq 0\}$$

とし、n**-単体**という。n-単体 $\langle v_0 v_1 \cdots v_n \rangle$ は $v_0, v_1 \cdots, v_n$ の凸包 ($n+1$ 点を含む最小の凸集合) である。内部 $\mathring{\sigma}$ を σ のうち $t_k > 0$ を満たすものとして定義する。

位相空間としてはユークリッド空間 $\mathbb{R}^N$ の部分位相空間と考える。

例 2.2. $\boldsymbol{v}_0 \in \mathbb{R}^N$ において、$\langle \boldsymbol{v}_0 \rangle$ は 0-単体であり、集合としては点である。$\langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \rangle$ は $\boldsymbol{v}_0$ と $\boldsymbol{v}_1$ を繋ぐ線分を表す。

定義 2.3. $\sigma = \langle v_0 v_1 \cdots v_n \rangle$ を n-単体とする。任意の部分集合 $\{v_{i_0}, \cdots, v_{i_l}\} \subset \{v_0, v_1, \cdots, v_n\}$ に対して、$\tau = \langle v_{i_0} \cdots v_{i_l} \rangle$ は l-単体であり、$\tau \subset \partial\sigma$ であり、σ の**面**であるという。$\tau \prec \sigma$ とかく。

$\partial\sigma$ は位相空間の境界の意味。$\partial\sigma = \sigma - \mathring{\sigma}$ である。

定義 2.4 (ユークリッド空間の単体複体)**.** K を $\mathbb{R}^N$ の単体の和集合 $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ とする。$i \neq j$ に対して $\mathring{\sigma}_i \cap \mathring{\sigma}_j$ であると仮定する。このとき、

$$\forall \sigma \in K, \tau \prec \sigma \Rightarrow \tau \in K$$

を満たすとき K を**単体複体**という。$\cup_{\sigma \in K}\sigma$ を $|K|$ と書き、K の**実現**という。

K の k-単体の集合を S_k とかく。また、単体複体 K に対して $K^{(k)}$ を K の k 次元以下の単体の和集合とする。つまり、

$$K^{(k)} = \cup_{i \leq k} S_i$$

である。

例 2.5. 標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ を持つユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ において、$\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{e}_2$ とすると、$\sigma = \langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \rangle$ とおくと、σ は2-単体である。

$$K = \{\langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle\}$$

となる。実現としては

$$|K| = \sigma$$

であり、

$$S_0 = \{\langle \boldsymbol{v}_0 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_2 \rangle\}$$

$$S_1 = \{\langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_2 \rangle, \langle \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \rangle\}$$

$$S_2 = \{\langle \boldsymbol{v}_0 \boldsymbol{v}_1 \boldsymbol{v}_2 \rangle\}$$

となる。

定義 2.6. 位相空間 X がある単体複体 K の実現 $|K|$ と同相であるとき、同相写像 $f : |K| \to X$ を X の**単体分割**という。

上記で構成した単体複体の位相は $\mathbb{R}^N$ の部分位相空間であるから最初からユークリッド空間に埋め込まれている。しかし、埋め込まれているとは限らない単体複抽象的な意味での体を定義する。これは、ある意味グラフの高次元化と思える。

集合 X に対して $\mathcal{P}_k(X)$ を X の濃度 k の部分集合全体とする。

定義 2.7 (単体複体)**.** V を有限集合とする。それを $S_0 = V$ として、$k = 1, \cdots, n$ に対して、$S_k \subset \mathcal{P}_{k+1}(V)$ で以下の条件を満たすとき $K = (S_0, S_1, \cdots, S_n)$ を n 次元単体複体という。

任意の $\sigma \in S_k$ に対して、$\sigma = \{v_0, v_1, \cdots, v_k\}$ とするとき、$0 \leq l < k$ に対して、任意の

$$\forall \tau \in \mathcal{P}_{l+1}(\sigma) \Rightarrow \tau \in S_l$$

である。

定義 2.8. 単体複体 $K = (S_0, S_1, \cdots, S_n)$ とする。有限集合 $S_0 = \{v_0, \cdots, v_n\}$ を $\mathbb{R}^N$ の同じ個数の点 $\boldsymbol{v}_0, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に対応させる。任意の $\sigma = \{v_{i_0}, \cdots, v_{i_k}\} \in S_k$ に対

して、ユークリッド空間のk-単体$\langle \boldsymbol{v}_{i_0} \cdots \boldsymbol{v}_{i_k} \rangle$を対応させることで、定義2.4の条件を満たすユークリッド空間の単体複体K'が選べたとする。このとき、$|K'|$をKの**実現**という。

定義 2.9. K, Lを単体複体とする。写像$f : K \to L$が以下を満たすとき、**単体写像**という。$f|_{K^{(0)}} = f_0$とする。

- $f_0 : K^{(0)} \to L^{(0)}$を満たす。
- $\forall \sigma = \langle \boldsymbol{v}_0, \cdots, \boldsymbol{v}_n \rangle \in K$に対して、$\{f_0(\boldsymbol{v}_0), \cdots, f_0(\boldsymbol{v}_n)\} = \{\boldsymbol{w}_0, \cdots, \boldsymbol{w}_l\}$とするとき、$\langle \boldsymbol{w}_0 \cdots \boldsymbol{w}_l \rangle \in L$となる。

単体写像fはn次元単体は高々n-単体にしか移らず、つまり一般にはn-単体σに対して$f(\sigma)$はあるk-単体であり、$k \leq n$である。

2.2 チェイン複体 (代数 part)

ホモロジーの公理から0次元ホモロジーがわかる。

定理 2.10. $H_0(X)$はアーベル群$\mathbb{Z}$を直和成分として含む。

Proof. $x \in X$に対して$c_x : \{p\} \to X$を定値写像とするとc_xは連続写像であるから、準同型写像$c_{x,*} : H_0\{\{p\}) \to H_0(X)$が誘導される。また、$p_x : X \to \{p\}$を定値写像とすると、$p_x \circ c_x = \mathrm{id}$であるから関手性から$p_{x,*} \circ c_{x,*} = \mathrm{id}$であるから、$H_0(X) \to \mathbb{Z}$が全射であるから$0 \to \mathrm{Ker}(p_{x,*}) \to H_0(X) \to \mathbb{Z} \to 0$が完全系列であるから、演習 2.15から、$H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Ker}(p_{x,*})$となる。 □

$H_0(\{p\})$の生成元を1とすると、$\langle x \rangle = c_{x,*}(1)$とすると、$\langle x \rangle$は直和成分の生成元であり、$H_0(X)$の生成元の1つになる。つまり$H_0(X) \cong \mathbb{Z}\langle x \rangle \oplus A$となる。
Xが弧状連結ならホモトピー公理から$x, y \in X$に対して$\langle x \rangle = \langle y \rangle$となる。

例 2.11.

$$D^n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

$$S^n = \{(x_0, x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

σ^nをn-単体とすると、D^nはσ^nと同相である。$(n+1)$-単体σ^{n+1}に対して、$\partial \sigma^{n+1}$はS^nと同相である。

空間のホモロジー群を構成する手順としてチェイン複体がある。

定義 2.12. C_k をアーベル群とし、$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ を群準同型とし、アーベル群と準同型の列 C_* を

$$C_* : \qquad \cdots \leftarrow C_0 \overset{\partial_1}{\leftarrow} C_1 \overset{\partial_2}{\leftarrow} C_2 \overset{\partial_3}{\leftarrow} \cdots \overset{\partial_{k-1}}{\leftarrow} C_{k-1} \overset{\partial_k}{\leftarrow} C_k \leftarrow \cdots$$

として定義する。$\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ となるとき、(C_*, ∂_*) を**チェイン複体**という。∂_k は**境界準同型**という。$Z_k := \mathrm{Ker}\,\partial_k$ の元を k **次サイクル**といい、$B_k := \mathrm{Im}\,\partial_{k+1}$ の元を k **次バウンダリ**という。このとき、Z_k/B_k をチェイン複体 (C_*, ∂_*) の k 次**ホモロジー群**といい、$H_*(C_*, \partial_*)$ とかく。

問い 2.13. Z_k の元はなぜサイクルというのか？また B_k の元はなぜバウンダリというのか？その意味を考えよ。

演習 2.14. σ^2 と σ^3 をそれぞれ2-単体と3-単体とする。その単体複体を K_{σ^2} と K_{σ^3} とする。

(1) 適当な面への包含写像を与える単体写像 $i : K_{\sigma^2} \to K_{\sigma^3}$ を与えよ。

(2) また、定値ではない単体写像 $g : K_{\sigma^3} \to K_{\sigma^2}$ を与えよ。

演習 2.15. $0 \to A \to B \to \mathbb{Z}^k \to 0$ が完全系列であるとき、$B \cong A \oplus \mathbb{Z}^k$ であることを示せ。

演習 2.16. A をアーベル群であるとする。$i : \mathbb{Z} \subset A$ が部分群であるが、A の直和成分ではないような A とその単射準同型 i の例をあげよ。

演習 2.17. $\mathbb{R}^3$ の部分集合を

- $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$
- $I = \{(x_1.x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 = 0, -2 \leq x_3 \leq 2\}$

としたとき、$S^2 \cup I$ の三角形分割を与えよ。絵で書いて説明すればよい。

宿題：５項補題の全射性の部分、および演習2.14, 2.15, 2.17を解いてmanabaに提出せよ。2.14の単体写像はまだやってなかったのでやらなくても大丈夫です。