

トポロジー B

担当 丹下 基生 : 研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

授業の概要

授業ホームページ : <https://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/25/topB.html>

(主にプリントのダウンロード用)

blog : (<http://motochans.blogspot.jp/>)

(授業内容など)

相談、質問などいつでも承ります。

教科書 : 幾何学 II ホモロジー入門 (東京大学出版) 坪井俊著

第 1 回 ('25 年 10 月 1 日 : Keywords ... 代数・トポロジーの復習とホモロジー理論の概要)

1.1 代数・トポロジーの復習

定義 1.1. 空ではない集合 G とその 2 項演算 $\cdot$ の組 $(G, \cdot)$ が群であるとは、以下の性質を満たすものである。

- (1) $e \in G$ がただ一つ存在して、任意の $g \in G$ に対して $e \cdot g = g \cdot e$ を満たす
- (2) $\forall g \in G$ に対して $g^{-1} \in G$ が存在して $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ を満たす。
- (3) $\forall f, g, h$ に対して $(f \cdot g) \cdot h = f \cdot (g \cdot h)$ を満たす。

群 G の e を単位元という。また、 g に対して g^{-1} を g の逆元という。演算 $\cdot$ は省略されることがある。 G がアーベル群であるとは G が群であり、 $\forall g, h \in G$ に対して $gh = hg$ を満たすときに言う。

定義 1.2. G_1, G_2 を群とする。写像 $f : G_1 \rightarrow G_2$ が群準同型 (単に準同型) であるとは以下を満たすときにいう。 $\forall g_1, g_2 \in G_1$ に対して、

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2)$$

を満たす。

$\mathcal{P}(X)$ を集合 X のべき集合といい、 X の全ての部分集合を集めた集合をあらわすとする。

定義 1.3. 集合 X に対して以下を満たす $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(X)$ を開集合系もしくは位相といい、 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間という。 $\mathcal{O}$ の元を開集合という。

- (1) $X, \emptyset \in \mathcal{O}$ を満たす。

(2) $U_1, U_2 \in \mathcal{O}$ ならば $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{O}$ である。

(3) $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathcal{O}$ の族とすると、 $\cup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ である。

定義 1.4. 写像 $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ が連続写像であるとは、 $\forall U \in \mathcal{O}_Y$ に対して、 $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ である。

定義 1.5. 連続写像 $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ であるとき、ある連続写像 $F : I \times X \rightarrow Y$ が存在して、 $F(0, x) = f_0(x)$ かつ $F(1, x) = f_1(x)$ を満たすとき、 f_0, f_1 はホモトピックであるという。

1.2 位相不変量と空間対

$\mathbb{K}$ をある集合とする。位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対してある値

$$\chi(X, \mathcal{O}) \in \mathbb{K}$$

が定義されたとする。位相空間 $(X, \mathcal{O}), (X', \mathcal{O}')$ が同相なら $\chi(X, \mathcal{O}) = \chi(X', \mathcal{O}')$ であるとき、 χ は位相不変量という。空間を表すのに、開集合系 $\mathcal{O}$ を省略して表すことがある。また、 X, X' が同相であるとき、 $X \cong X'$ という記号を使う。

例 1.6. X に対して X の連結成分の個数を $\chi(X)$ とすると $\chi(X) \in \mathbb{Z}$ は X の位相不変量である。

$\mathbb{K}$ は実数や複素数などの数以外にも数学におけるさまざまな対象に値を持つようにできる。位相空間の同相類を決定するには数だけでは足りない構造が必要とも言える。

定義 1.7. 位相空間 X と部分集合 $A \subset X$ に対して、 (X, A) を空間対という。 $A = \emptyset$ (空集合) の場合は、 $(X, \emptyset)$ を X と同一視する。

空間対 $(X, A), (Y, B)$ に対して連続写像 $f : X \rightarrow Y$ かつ $f|_A : A \rightarrow B$ を満たすとき、 f は空間対の間の連続写像として、 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ とかく。 $A = B = \emptyset$ の場合連続写像は通常の場合の連続写像 $f : X \rightarrow Y$ である。

ホモロジー理論 … 空間対 (X, A) と整数 n に対してアーベル群 $H_n(X, A)$ を与える理論

上記の $\mathbb{K}$ はアーベル群全体の集合となる。アーベル群とは可換な演算を持つ群のこと。つまり上記の $\mathbb{K}$ はアーベル群全体のなす集合とする。

注 1.8. $A = \emptyset$ の場合、ホモロジーは $H_n(X)$ とかく。 $H_n(X)$ は位相空間 X の位相不変量になる。

問い 1.9. なぜ、アーベル群を値に持つようにするのか？

連続写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して、準同型写像 $f_*: H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ を誘導するようにしたい。連続写像からも情報を出せる。

例 1.10. S^2 を球面 ($\mathbb{R}^3$ 中のユークリッド空間の部分空間としての単位球) とする。このとき、

$$H_n(S^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

T^2 をトーラスとする。このとき、

$$H_n(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}^2 & n = 1 \\ \mathbb{Z} & n = 2 \\ 0 & n \geq 3 \end{cases}$$

となる。 $n = 1$ の値が違う (0 と $\mathbb{Z}^2$ が同型ではない) ので S^2 と T^2 は同相でない
とわかる。これらの計算は今はできないがこれからできるようにする。

これからこの授業で行うこと

- 空間対 (X, A) からどうやって $H_n(X, A)$ を定義するのか？
- 空間対 (X, A) からどうやって $H_n(X, A)$ を計算するのか？

この授業で理解すること

- ホモロジー $H_n(X)$ が位相空間 X における何を計算していることに相当するのか理解すること。
- ホモロジー H_* を用いて位相空間 X や連続写像の情報を引き出すこと。

1.3 完全系列

A, B, C をアーベル群とする。

定義 1.11. 準同型写像 f, g が

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

であるとき、 $\text{Ker } g = \text{Im } f$ であるとき、 f, g が B において完全であるという。 A_n がアーベル群であるとする。

$$A_0 \xrightarrow{h_0} A_1 \xrightarrow{h_1} A_2 \xrightarrow{h_2} \cdots \rightarrow A_{n-1} \xrightarrow{h_{n-1}} A_n \quad (1)$$

が準同型の列であるとする。任意の i に対して h_{i-1}, h_i が A_i において完全であるとき、(1) は完全系列であるという。

$$A'_0 \xrightarrow{h'_0} A'_1 \xrightarrow{h'_1} A'_2 \xrightarrow{h'_2} \cdots \rightarrow A'_{n-1} \xrightarrow{h'_{n-1}} A'_n \quad (2)$$

を完全系列として、準同型写像 $f_k : A_k \rightarrow A'_k$ が $h'_k \circ f_k = f_{k+1} \circ h_k$ が成り立つとする。

問 1.12. この 2 つの完全系列を並べて書き、完全系列が準同型であることは図式として何を意味するか考えよ。

補題 1.13 (五項補題). 次の 2 行が長完全系列の間の準同型であるとする。

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{h_1} & A_2 & \xrightarrow{j_*} & A_3 & \xrightarrow{\partial_n} & A_4 & \xrightarrow{j_*} & A_5 \\ \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & \downarrow f_4 & & \downarrow f_5 \\ A'_1 & \xrightarrow{h'_1} & A'_2 & \xrightarrow{h'_2} & A'_3 & \xrightarrow{h'_3} & A'_4 & \xrightarrow{h_4} & A'_5 \end{array}$$

f_1, f_2, f_4, f_5 が同型であるとき、 f_3 も同型である。

問題 1.14. 上の準同型に対して、 f_3 が同型である為には f_1, f_2, f_4, f_5 がもう少し弱い条件で成り立つ。それは何か？

1.4 ホモロジーの公理

ホモロジー理論 H_n とは、空間対 (X, A) に対してあるアーベル群の列 $\{H_n(X, A)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ を与え、任意の連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に対してある準同型写像 $f_* : H_n(X, A) \rightarrow H_n(Y, B)$ を与えるもので、次の公理を満たすものである。

公理 1.15.

(F) (X, A) に対して $H_*(X, A)$ を与えることは共変関手である。つまり以下を満たす。

- 連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ と $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$ に対して、 $g_* \circ f_* = (g \circ f)_*$ を満たす。
- $\text{id} : (X, A) \rightarrow (X, A)$ が恒等写像のとき、 id_* は $H_*(X, A)$ 上の恒等写像となる。

- (H) H_n はホモトピー公理を満たす。つまり、 f_0, f_1 がホモトピックであれば、 $f_{0,*} = f_{1,*}$ を満たす。
- (P) 空間対に対して長完全系列が存在する。空間対から長完全系列のその対応は共変関手である。つまり、 (X, A) に対して準同型 $\partial_* : H_n(X, A) \rightarrow H_{n-1}(A)$ が存在して、空間対の長完全系列

$$\rightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

が存在する。ここで包含写像 $i : A \hookrightarrow X$ と $j : (X, \emptyset) \rightarrow (X, A)$ とする。

$i' : B \rightarrow Y$ かつ $j' : (Y, \emptyset) \rightarrow (Y, B)$ と連続写像 $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ に対して、以下の図式が長完全系列の準同型となる。

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & H_n(A) & \xrightarrow{i_*} & H_n(X) & \xrightarrow{j_*} & H_n(X, A) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(A) & \cdots \\ & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\ \cdots & H_n(B) & \xrightarrow{i'_*} & H_n(Y) & \xrightarrow{j'_*} & H_n(Y, B) & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(B) & \cdots \end{array}$$

- (E) 切除公理を満たす。つまり $B \subset A \subset X$ において A を開集合 B を閉集合とすると、包含写像 $i : (X - B, A - B) \hookrightarrow (X, A)$ に関して

$$i_* : H_n(X - B, A - B) \rightarrow H_n(X, A)$$

が同型となる。

- (D) 次元公理を満たす。つまり、

$$H_n(\{p\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

を満たす。

∂_* は連結準同型という。

問題 1.16. 準同型写像 $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ はどのような写像であるか？

問題 1.17. $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ が完全であるとき、 f が単射であることを示せ。

問題 1.18. $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$ が完全であるとき、 f が全射であることを示せ。

問題 1.19. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ が完全であるとき、 $B \cong \mathbb{Z}^2$ であることを示せ。

問題 1.20. $0 \rightarrow \mathbb{Z}^a \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} \mathbb{Z}^b \rightarrow 0$ が完全であるとき、 $B \cong \mathbb{Z}^{a+b}$ であることを示せ。

問題 1.21. $0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ が完全であるとき、 C の同型類を f の性質によって決定せよ。

問題 1.22. $x \in X$ に対して、 $c_x : \{p\} \rightarrow X$ を p を x に持っていく写像とする。 X が弧状連結であるとする。すると $x, x' \in X$ に対して $c_x, c_{x'}$ はホモトピー同値であることを示せ。

問題 1.23. $X = X_1 \sqcup X_2$ をみたし、 X_1, X_2 が X の開集合であるとする。このとき、 $H_n(X) = H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ であることを示せ。