

数学リテラシー 1

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回 ('25年4月18日)

演習問題

問題 1 [単射・全射 1]

次の写像は単射であるかどうか、全射であるかどうか、判定せよ。

- (1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ として $x \mapsto x^3$
- (2) 任意の集合 A に対して、 $f: A \rightarrow A$ として $a \mapsto a$
- (3) $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ として、 $n \mapsto 2n$
- (4) $f: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ として $x \mapsto 2x$

問題 2 [単射・全射 2]

写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して以下を示せ。

- (1) f, g が単射であれば、 $g \circ f$ も単射である。
- (2) f, g が全射であれば、 $g \circ f$ も全射である。

問題 3 [単射・全射 3]

写像 $f: A \rightarrow B$ と $g: B \rightarrow C$ に対して以下を示せ。

- (1) $g \circ f$ が単射であれば、 f も単射である。
- (2) $g \circ f$ が全射であれば、 g も全射である。

問題 4 [和集合と共通集合と像 (試験の範囲外)]

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 $C_1, C_2 \subset A$ に対して、以下を示せ。

- (1) $f(C_1 \cap C_2) \subset f(C_1) \cap f(C_2)$
- (2) $f(C_1 \cup C_2) = f(C_1) \cup f(C_2)$

もし余裕があれば、以下も解いてみよう。

問題 5 [和集合と共通集合と逆像 (試験の範囲外)]

写像 $f: A \rightarrow B$ に対して、 $D_1, D_2 \subset B$ に対して、以下を示せ。

- (1) $f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(D_1) \cap f^{-1}(D_2)$
- (2) $f^{-1}(D_1 \cup D_2) = f^{-1}(D_1) \cup f^{-1}(D_2)$

問題 6 [共通集合と像 (試験の範囲外)]

上の問題 4-(1) で、“ $\subset$ ”が“ $=$ ”とならない例を考えよ。

問題 7 [像と逆像 (試験の範囲外)]

写像 $f: A \rightarrow B$ と、 $C \subset A$ と $D \subset B$ に対して、

$$(1) f^{-1}(f(C)) \supset C$$

$$(2) f(f^{-1}(D)) \subset D$$

が成り立つことを示せ。また、 $\supset$ や $\subset$ が等式とならない例を示せ。

第 1 回の答え

問題 1 教科書の問 1.1.1 と同じなので省略

問題 2 教科書の問 1.1.2 と同じなので省略

問題 3 教科書の問 1.1.3 と同じなので省略

問題 4 教科書の問 1.2.1 と同じなので省略

問題 5 (1) $2\mathbb{Z} + 1$ を奇数の集合を意味するとする。真理集合は $\{x \in \mathbb{N} \mid 0 < x < 23\} \cap (2\mathbb{Z} + 1) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21\}$ であり、その個数は 15 である。

(2) 真理集合は、 $\{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}, x + y < 5\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}$ となり、その個数は 6 である。

問題 6 $x \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ をとると、ある整数 n, m を用いて $x = 2n + 3m$ と書ける。整数は整数どうしの掛け算、足し算において閉じているので、 x も整数である。故に $x \in \mathbb{Z}$ である。よって $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ が分かる。また、逆に任意に $k \in \mathbb{Z}$ をとると、 $k = 4k - 3k$ であり、さらに $k = 2(2k) + 3(-k)$ と書き直すことで、 $2(2k) + 3(-k) \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ であることが分かる。よって $k \in 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ である。よって、 $\mathbb{Z} \subset 2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z}$ も言えたので、集合として $2\mathbb{Z} + 3\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ が分かる。

問題 7 (1) 任意に $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$ をとる。このとき、 $x \in A_1 \cup A_2$ かつ $x \in B$ である。もし $x \in A_1$ であれば、 $x \in A_1 \cap B$ である。また、もし $x \in A_2$ であれば、 $x \in A_2 \cap B$ である。よって $x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ である。つまり、 $(A_1 \cup A_2) \cap B \subset (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ が言える。

逆に、 $x \in (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ を仮定する。今、さらに $x \in A_1 \cap B$ と仮定すると、 $x \in A_1 \cap B \subset (A_1 \cup A_2) \cap B$ であるので、特に $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$ である。一方、 $x \in A_2 \cap B$ と仮定すると、 $x \in A_2 \cap B \subset (A_1 \cup A_2) \cap B$ であるので、特に $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$ である。よってどちらにしても $x \in (A_1 \cup A_2) \cap B$ が言える。故に、 $(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \subset (A_1 \cup A_2) \cap B$ が言える。

これらのことから、集合として $(A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ が分かる。

(2) 上と同様にやれば良いので省略する。