トポロジーB

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

定期試験答え（’25 年 2 月 17 日）

問題-1.

ユークリッド空間の頂点 v_0, v_1, v_2 を頂点とする 2-単体 Δ^2 を重心細分した単体複体 $D(\Delta^2)$ に含まれる単体を全て列挙せよ。ただし、$i_1 < i_1 < \cdots < i_k$ となる添え字について、$v_{i_1} \cdots , v_{i_k}$ の重心を $v_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 等の記号をもちいてもよい。
(答え)

$$\{|v_0|, |v_1|, |v_2|, |v_{01}|, |v_{02}|, |v_{12}|, |v_{012}|$$

$$, |v_0v_{01}|, |v_1v_{01}|, |v_0v_{02}|, |v_2v_{02}|, |v_1v_{12}|, |v_2v_{12}|, |v_{01}v_{012}|, |v_{12}v_{012}|, |v_{02}v_{012}|, |v_0v_{012}|, |v_1v_{012}|, |v_2v_{012}|$$

$$, |v_0v_{01}v_{012}|, |v_1v_{01}v_{012}|, |v_1v_{12}v_{012}|, |v_2v_{12}v_{012}|, |v_2v_{02}v_{012}|, |v_0v_{02}v_{012}|\}$$

□

問題-2.

単体複体 K, L を $K = \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|\}$, $L = \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|\}$ とする。$\phi : K \to L$ 及び $\psi : L \to K$ をそれぞれ $\phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ もしくは $\psi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ とする写像は単体写像になるか？また、なるとするとそのホモロジーに誘導する写像 ϕ_* もしくは ψ_* はどのような写像か？
(答え) ϕ は単体写像にならない。なぜなら $|\phi(v_0)\phi(v_1)\phi(v_2)| = |v_0v_1v_2|$ は L の単体ではならないから。ψ は単体写像になる。

$$H_*(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0 \\ 0 & * \neq 0 \end{cases}$$

かつ

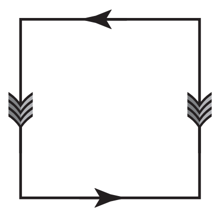
$$H_*(L) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0, 1 \\ 0 & * \neq 0, 1 \end{cases}$$

である。$\psi_n : H_*(L) \to H_n(K)$ は $n = 0, 1$ 以外ではいつでも 0-写像である。$n = 0, 1$ の場合のみやれば良い。$\psi_*(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ であり、$H_n(K)$ と $H_n(L)$ は $[v_i]$ によって生成されるから $\psi_* : H_0(L) \to H_1(K)$ は恒等写像。$\psi_* : H_1(L) \to H_1(K)$ において $H_1(L)$ の生成元は $\gamma := \langle v_0v_1\rangle + \langle v_1v_2\rangle + \langle v_2v_0\rangle$ であり、$\psi_*(\gamma) = \langle v_0v_1\rangle + \langle v_1v_2\rangle + \langle v_2v_0\rangle = \partial\langle v_0v_1v_2\rangle$ である。よって $H_1(L))$ において $\psi_*(\gamma) = 0$ である。つまり $\psi_* : H_1(L) \to H_1(K)$ は 0-写像。

□

問題-3.

下の正方形の内部と境界を向きを込めて図のように貼り合わせて得られる空間の基本群とホモロジー群を求めよ。



(答え) 求める空間を K とおく。下の図のように三角形分割をする。このうち 1 つの三角形 σ 取り除く。残った部分 R はこの 4 角形の境界のみにホモトピー同値である。つまり R は 2 つのブーケである。この基本群は自由群 $F_2 = \langle a, b|-\rangle$ である。このとき、σ の境界は向きを適当につけることで、$b^{-1}aba$ にうつる。よって、$\pi_1(K) = \langle a, b|b^{-1}aba\rangle$ となる。$H_1(K)$ は $\pi_1(K)$ の Abel 化であるので、$\mathbb{Z}\langle a, b\rangle/2a = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ となる。また、MV 系列

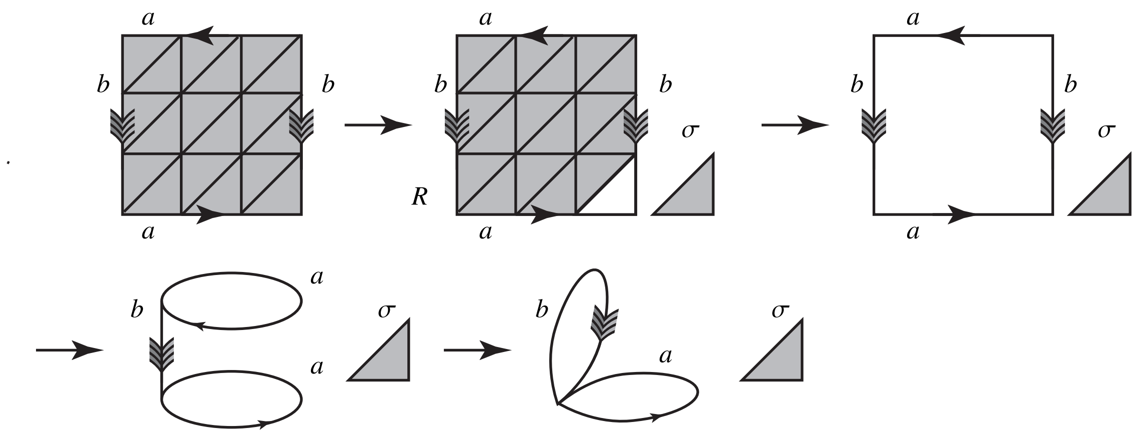
$$\cdots \to H_2(R) \oplus H_2(\sigma) \to H_2(K)$$

$$\xrightarrow{\delta_1} H_1(\partial\sigma) \xrightarrow{i_1} H_1(R) \oplus H_1(\sigma) \xrightarrow{j_1} H_1(K)$$

$$\xrightarrow{\delta_1} H_0(\partial\sigma) \xrightarrow{i_0} H_0(R) \oplus H_0(\sigma) \to H_0(K)$$

を考えると、R はグラフであり 1 単体以下で構成される単体複体の構造をもつから $H_2(R) = 0$ となり、σ は可縮なので $H_2(\sigma) = 0$ となる。ゆえに $H_2(K) \to H_1(\partial\sigma)$ は単射である。$i_1 : H_1(\partial\sigma) \to H_1(R)$ は $i_1(\partial\sigma) = 2a$ であるから i_1 は単射である。よって、$\delta_2 = 0$ であるから $H_2(K) = 0$ である。K は連結であるから $H_0(K) = \mathbb{Z}$ である。K は 2 次元であるから $n > 2$ の場合 $H_n(K) = 0$ である。よって、

$$H_n(K) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & n = 1 \\ 0 & n \neq 0, 1 \end{cases}$$



問題-4.

連結な単体複体 K の鎖複体 $\{C_i(K), \partial_i\}$ に対して次の列

$$\begin{aligned} D &: \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} Z_1(K) \to 0 \to 0 \to 0 \\ E &: \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0 \end{aligned}$$

を定義する。写像が書いていない矢印は 0-写像である。ここで $Z_1(K) = \mathrm{Ker}(\partial_1)$ とし、$\epsilon\left(\sum_v a_v v\right) = \sum_v a_v$ とする。$\varphi_i : D_i \to E_i$ を複体の包含写像が誘導する準同型写像とする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) φ_i は鎖準同型であることを示せ。

(2) φ_i はホモロジー群に同型写像を誘導することを示せ。

(答え)(1) $n \neq 1$ の場合、φ_i は恒等写像か 0 写像なので、明らかに φ_i は鎖準同型である。$n = 1$ の場合を考える $x \in Z_1(K)$ に対して $\varphi_1(\partial x) = 0 = \partial x = \partial(\varphi_1 x)$ よって φ_1 は鎖準同型である。
(2) $i \geq 2$ の時、φ_i は同型写像なので $\varphi_{i,*}$ も同型写像を誘導する。$i = -1$ の場合、$H_{-1}(E) \ni [n]$ とすると、任意の $v \in K^{(0)}$ に対して $n = \epsilon(nv)$ が成り立つので、明らかに ϵ は全射であり、$[n] = [0] \in H_{-1}(E)$ であるから、$H_{-1}(E) = 0$ である。よって、$\varphi_{-1,*} = 0$ であり、同型である。$H_0(D) = 0$ であるから $H_0(E) = 0$ であることを示す。任意の $w \in H_0(E)$ をとり、$w = \sum_v a_v v$ とする。$\epsilon(\sum_v a_v v) = \sum_v a_v = 0$ とする。もし $a_{v_0} \neq 0$ であると、$a_{v_0} = -\sum_{v \neq v_0} a_v$ であるから $\sum_v a_v v = \sum_{v \neq v_0} a_v(v - v_0)$ となる。ここで K は連結であるから、$v - v_0 = \partial\gamma_v$ となる v, v_0 を端点とする道 γ_v が存在する。よって、$w = \sum_v a_v v = \partial \sum_{v \neq v_0} a_v \gamma_v$ であるから $H_0(E) = 0$ である。よって $\varphi_{0,*}$ は 0-写像として同型を誘導する