トポロジーB

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

定期試験（'25 年 2 月 17 日）

問題-1.

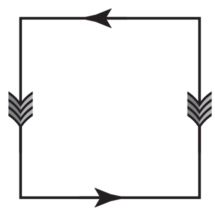
ユークリッド空間の頂点 v_0, v_1, v_2 を頂点とする 2-単体 Δ^2 を重心細分した単体複体 $D(\Delta^2)$ に含まれる単体を全て列挙せよ。ただし、$i_1 < i_1 < \cdots < i_k$ となる添え字について、$v_{i_1} \cdots, v_{i_k}$ の重心を $v_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ 等の記号をもちいてもよい。 (答え)

問題-2.

単体複体 K, L を $K = \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|\}$, $L = \{\boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_1|, |\boldsymbol{v}_0\boldsymbol{v}_2|, |\boldsymbol{v}_1\boldsymbol{v}_2|\}$ とする。$\phi : K \to L$ 及び $\psi : L \to K$ をそれぞれ $\phi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ もしくは $\psi(\boldsymbol{v}_i) = \boldsymbol{v}_i$ とする写像は単体写像になるか？また、なるとするとそのホモロジーに誘導する写像 ϕ_* もしくは ψ_* はどのような写像か？

問題-3.

下の正方形の内部と境界を向きを込めて図のように貼り合わせて得られる空間の基本群とホモロジー群を求めよ。



問題-4.

連結な単体複体 K の鎖複体 $\{C_i(K), \partial_i\}$ に対して次の列

$$\begin{array}{ll} D & : \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} Z_1(K) \to 0 \to 0 \to 0 \\ E & : \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2(K) \xrightarrow{\partial_2} C_1(K) \xrightarrow{\partial_1} C_0(K) \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z} \to 0 \end{array}$$

を定義する。写像が書いていない矢印は 0-写像である。ここで $Z_1(K) = \mathrm{Ker}(\partial_1)$ とし、$\epsilon\left(\sum_v a_v v\right) = \sum_v a_v$ とする。$\varphi_i : D_i \to E_i$ を複体の包含写像が誘導する準同型写像とする。このとき、以下の問題に答えよ。

(1) φ_i は鎖準同型であることを示せ。

(2) φ_i はホモロジー群に同型写像を誘導することを示せ。