線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第9回（'25年2月10日)

アフィン変換=アファイン変換

$SO(2)$ は可換である。

$$A_\theta A_\phi = A_\phi A_\theta$$

であるが、$O(2)$ は非可換である。$\sigma = B_0$ とする。このとき、

$$\sigma \cdot A_\theta \cdot \sigma^{-1} = A_{-\theta}$$

問題 1 [直交変換]
直交行列は計量を保つ。つまり、$(A\boldsymbol{v}, A\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ である。どうしてか？証明して見よ。また計量を保つとき、長さを変えないし、角度も変えない。なぜか？

直交行列 A であるから ${}^tAA = E$ であるから、この行列式をとることで、$(\det A)^2 = 1$ となり、つまり $\det A = \pm 1$ である。よって次が成り立つ。

Thm. 3次直交行列 $O(3)$ は以下の分割をもつ.

$$O(3) = SO(3) \sqcup SO^-(3)$$

補題 8.9. $A \in SO(2n+1)$ の固有値は必ず1を含む.

問題 2 [$SO(3)$ の行列は固有値1を含む理由]
なぜか？

定理 8.10. $SO(3)$ の各元は $\mathbb{R}^3$ のある直線を軸にした回転である.

問題 3 [固有値1の直交変換]
固有値1を直交行列はその固有ベクトルの方向でどのようなことが起こっているか？図示して見よ。

3次の直交行列で $A \in SO(3)$ となるとき、固有多項式は $\Phi_A(t) = t^3 - \mathrm{tr}(A)t^2 + \cdots - 1$ となる。他

の 2 つの固有値を α, β とすると、$\alpha\beta = 1$ であり、これらは実 2 次多項式の根であるから複素共役(きょうやく) である。つまり、$\beta = \bar{\alpha}$ であり、$|\alpha| = 1$ となり、$\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ とおく。このとき、$\mathrm{tr}(A) = \alpha + \bar{\alpha} + 1 = 2\cos\theta + 1$ である。

固有値 1 の固有空間が 1 次元であるとき、つまり、$\alpha \neq 1$ であるとする。その固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_3$ とし、$|\boldsymbol{p}_3| = 1$ とする。$\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$ を正規直交基底とするベクトルを $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2$ が存在する。このようにして直交行列 $S = (\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{p}_3)$ を作っておく。

回転角を求めるには，固有ベクトルを $\boldsymbol{p}_3$ として，

$$S^{-1}PS = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (*)$$

となる ϕ が得られる．

$\boxed{\text{問題 4}}$ [$SO(2)$ の固有値]

このとき、$\phi = \theta$ とできる。なぜか？$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ の固有値を求めて見よ。

$(*)$ は P の回転角が θ であることを示している。回転軸の方向が決められないので，回転角の絶対値のみ定まる．つまり，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ において定まることになる．

$\boxed{\text{問題 5}}$ [2 次直交行列]

平面上の 3 点 $(-2, 0)$, $(1, \sqrt{3})$, $(1, -\sqrt{3})$ をこれら 3 点に写す 2 次直交行列をすべて求めよ．

$\boxed{\text{問題 6}}$ [3 次直交行列]

空間の 4 点 $P(1,1,1)$, $Q(-1,-1,1)$, $R(1,-1,-1)$, $S(-1,1,-1)$ をこれら 4 点へ移す回転対称は全部でいくつあるか．回転角ごとに対応する行列を全て求めよ．

学籍番号 (　　　　　　　　　　), (　　　　　　　) 学類, 氏名 (　　　　　　　　　　　　)

必要であれば、裏面を用いても良い。

問題-9-1.

次の平面への作用の合成を考える．合成の順番は書いてある番号順に行うものとする．

$$(1)\ \text{角度}\ \frac{2\pi}{3}\ \text{の回転},\ (2)\ \text{角度}\ \frac{2\pi}{3}\ \text{の直線に関する鏡映},\ (3)\ \text{角度}\ -\frac{\pi}{4}\ \text{の回転}$$

(ここで直線とは原点を通るものとする.)

この直交変換はどのような変換を表すか？下のうちのどちらかを選びまるで囲め。

(a) 角度 θ の回転，もしくは，(b) 直線 $y = mx$ に関する鏡映

(a) の場合は θ を、(b) の場合は傾き m の角度 θ を求めよ。(ただし，回転の場合は $0 \leq \theta < 2\pi$ で，鏡映の場合は $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$ で答えよ．)

問題-9-2.

2 次曲線 $f(x,y) = x^2 - 2xy - 3y^2 - x + y + 2 = 0$ を適当に変数変換をして $aX^2 + bY^2 = 1$ と表すことができるとき、a, b を求めよ。ただし $a > 0$ とする。このとき、X, Y を x, y のアファイン変換 (1 次式) によって表せ。

問題-9-3.

次の行列の表す回転の軸 (その方向ベクトル) とその回転角を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$