線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第8回（'25年2月5日)

問題 7 [2次超曲線]
以下の方程式が表す2次超曲線は何か？合同変換ではなく，アフィン変換で考え，大体の形をいえ．

(1) $x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 4y + c = 0$

(2) $x^2 + xy - 2x - 2y = 0$

(3) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$

問題 8 [2次超曲面]
以下の方程式が表す2次超曲面は何か？合同変換ではなく，アフィン変換で考え，大体の形をいえ．

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 1 = 0$

(2) $xy + yz + zx - 2x - 3y + z - c = 0$ (教科書の例 8.1)

(3) $x^2 + 2xy + 4yz + 2zx - 3x + 2y - z = 0$ (教科書の例 8.2)

(4) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2zx + 3x - y + 5z + 28 = 0$ (教科書の例 8.3)

直交行列全体と行列式が1の直交行列全体を以下のように表す。

$$O(n) = \{A|{}^tAA = E\}$$

$$SO(n) = \{A|{}^tAA = E, \det(A) = 1\}$$

Thm. 2次直交行列 $O(2)$ は以下のいずれかになる．

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\ B_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = B_0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma I = -I\sigma, \sigma^2 = E$$

$\boxed{\text{問題 9}}$ [等式]
この等式を確かめよ．

$SO(2) = \{A_\theta = (\cos\theta)E + (\sin\theta)I \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$，$SO^-(2) = \{A_\theta\sigma \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$ とおくと，

$$O(2) = SO(2) \sqcup SO^-(2)$$

この分割は，$SO(2) = \{A \in O(2) \mid \det A = 1\}$，$SO^-(2) = \{A \in O(2) | \det A = -1\}$ である．このとき，

$$B_\theta = A_\theta\sigma,\ A_\theta\sigma = \sigma A_{-\theta}$$

定理 8.5.

$$A_\theta A_\varphi = A_{\theta+\varphi},\ A_\theta B_\varphi = B_{\theta+\varphi}$$

$$B_\theta A_\varphi = B_{\theta-\varphi},\ B_\theta B_\varphi = A_{\theta-\varphi}$$

$\boxed{\text{問題 10}}$ [等式]
これらの等式を確かめよ．

補足
空集合ではない集合 G が $x, y \in G$ に対して $xy \in G$ かつ，単位元 e，逆元 g^{-1}，$g(hk) = (gh)k$ を満たすものを群という．$O(2)$ と $SO(2)$ は群となる．$SO(2) \subset O(2)$ は部分群という．

行列を $\mathbb{R}^2$ に左からかけるとき，$\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ と同一視する．$\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ に対して

$$A_\theta \boldsymbol{v} = (\cos\theta \cdot E + \sin\theta \cdot I)\boldsymbol{v} = (\cos\theta + i\sin\theta)\boldsymbol{v}$$

$$B_\theta \boldsymbol{v} = (\cos\theta \cdot E + \sin\theta \cdot I)\sigma\boldsymbol{v} = (\cos\theta + i\sin\theta)\bar{\boldsymbol{v}}$$

に等しい．A_θ は原点中心の θ 回転，B_θ は角度 $\dfrac{\pi}{2}$ の原点を通る直線の鏡映．$\mathbb{R}^2$ に群を働かせることを作用という．

学籍番号 (　　　　　　　　　　　　), (　　　　　　　　　　) 学類, 氏名 (　　　　　　　　　　　　　　　)

必要であれば、裏面を用いても良い。

問題-8-1.

次の方程式が表す曲線および曲面の名称を記せ。アフィン変換で表せ。

(1) $F(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 2y - 3 = 0$

(2) $F(x,y,z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y - z^2 + 4z - 4 = 0$

問題-8-2.

パラメータ c を含む次の 2 次曲面はどのようなものか.

$$3x^2 + 4y^2 + cz^2 - 6xz - 2x - 4y + 6z = 0$$

問題-8-3.

$(1,1)$ を $(\sqrt{2},0)$ に移す直交行列はどのようなものがあるか？全て求めよ。