線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回（'25年2月3日)

$\mathbb{R}^n$ の座標系 $\{R; \boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n\}$ とは、原点を R として、ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}^n$ を基底とする座標系である。このとき、$\mathbb{R}^n$ 上の点 P と $(r_1, \cdots, r_n) + c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}^n$ と $(c_1, \cdots, c_n)$ を同一視できる。$R = (r_1, \cdots, r_n)$ である。アフィン変換とは、$P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} =: \boldsymbol{x}$ による座標の取り替えとなる。

問題 1 [アフィン変換]
アフィン変換の簡単な例を挙げよ。P が対角行列である場合どうなるか？

$P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} =: \boldsymbol{x}$ が合同変数であるとは，P が直交行列であるときをいう．基底どうしは直交しているわけではなく、一般に斜交座標系となる。直交している場合は直交座標系という。2 次式 $F = F(x_1, \cdots, x_n)$ は，アフィン変換によって

$$F = ({}^t\boldsymbol{x}\ 1)\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ 1 \end{pmatrix} = ({}^t\boldsymbol{y}\ 1)\begin{pmatrix} {}^tP & \boldsymbol{0} \\ {}^t\boldsymbol{u} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & \boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b} & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & \boldsymbol{u} \\ {}^t\boldsymbol{0} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix} = ({}^t\boldsymbol{y}\ 1)\begin{pmatrix} {}^tPAP & \boldsymbol{b}' \\ {}^t\boldsymbol{b}' & c' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ 1 \end{pmatrix}$$

のように写る．

補題 8.2
方程式 $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^n 2b_ix_i + c$ が変換 $P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} =: \boldsymbol{x}$ で $\displaystyle\sum_{i,j=1}^n b_{ij}y_iy_j + \sum_{i=1}^n b_i'y_i + c'$ にうつるとすると，$B = {}^tPAP$ かつ，$\boldsymbol{b} = {}^tP(A\boldsymbol{u} + \boldsymbol{b})$ かつ $c' = {}^t\boldsymbol{u}A\boldsymbol{u} + 2{}^t\boldsymbol{u}\boldsymbol{b} + c$ となる．

問題 2 [合同変換の合成]
合同変換の合成は合同変換であることをしめせ。

問題 3 [合同変換とアフィン変換の違い]
合同変換とアフィン変換はどのような違いがあるか？たとえば、楕円は合同変換の見方によってどのようなものだと思えるか？またアフィン変換によってどのようなものだと思えるか？

定理 8.3
２次超曲面は，合同変換のもと，次のいずれかになる．

$$\begin{cases} (1)\ \alpha_1x_1^2 + \cdots + \alpha_rx_r^2 + \gamma = 0 \\ (2)\ \alpha_1x_1^2 + \cdots + \alpha_rx_r^2 + \beta x_{r+1} + \gamma = 0 \\ (3)\ \alpha_1x_1^2 + \cdots + \alpha_rx_r^2 = 0 \end{cases}$$

ここで，$\alpha_1, \cdots, \alpha_r, \beta, \gamma$ は全て 0 ではない実数で、(1), (3) は $r \leq n$ であり、(2) は $r < n$ であり、α_i と β と γ はいずれも 0 ではない実数.

この定理により、2 次曲面が分類される。

(1) $-\gamma$ で全体を割る.
(2) -2β で全体を割る.
このように変形しても超曲面は変わらない．このとき，上の分類は以下のようになる.

$$\begin{cases} (1)\ \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2 = 1 \\ (2)\ \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2 = x_{r+1} \\ (3)\ \alpha_1 x_1^2 + \cdots + \alpha_r x_r^2 = 0 \end{cases}$$

$n = 2$ の場合の 2 次超曲面の分類
(2 次の部分の符号を (p, q) とする)
(1)

$$r = 2 \begin{cases} (p,q) = (2,0) & \text{楕円} \\ (p,q) = (1,1) & \text{双曲線} \\ (p,q) = (0,2) & \text{空集合} \end{cases} \qquad r = 1 \begin{cases} (p,q) = (1,0) & \text{平行な 2 直線} \\ (p,q) = (0,1) & \text{空集合} \end{cases}$$

(2)
$r = 1$, $(p, q) = (1, 0), (0, 1)$ 放物線
(3)

$$r = 2 \begin{cases} (p,q) = (2,0),(0,2) & \text{1 点} \\ (p,q) = (1,1) & \text{交わる 2 直線} \end{cases} \qquad r = 1,\ (p,q) = (1,0),(0,1)\ \text{1 直線}$$

$n = 3$ の場合の 2 次超曲面の分類
((1)$r < 3$, (2)$r < 2$, (3)$r < 3$ は $n = 2$ の場合の曲線に $\mathbb{R}$ を直積したもの)
(1)

$$r = 3 \begin{cases} (p,q) = (3,0) & \text{楕円面} \\ (p,q) = (2,1) & \text{一葉双曲面} \\ (p,q) = (1,2) & \text{二葉双曲面} \\ (p,q) = (0,3) & \text{空集合} \end{cases}$$

(2)

$$r = 2 \begin{cases} (p,q) = (2,0),(0,2) & \text{楕円放物線} \\ (p,q) = (1,1) & \text{双曲放物面} \end{cases}$$

(3)

$$r = 3 \begin{cases} (p,q) = (2,1),(1,2) & \text{楕円錘面} \\ (p,q) = (3,0),(0,3) & \text{1 点のみ} \end{cases}$$

$\boxed{\text{問題 4}}$ [対称行列の対角化]
次の 2 次形式 $Q(x, y)$ を表す図形はどちらも楕円である．合同変換における標準形を求めるとともに，その単軸と長軸の長さを求めよ.

- $Q(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3$
- $Q(x, y) = 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 3y^2 + 2x + 2\sqrt{3}y$

$\boxed{\text{問題 5}}$ [2 次超曲線]
以下の方程式が表す 2 次超曲線は何か？合同変換ではなく，アフィン変換で考え，大体の形をいえ．

(1) $x^2 - y^2 + 2xy + 2x + 4y + c = 0$

(2) $x^2 + xy - 2x - 2y = 0$

(3) $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y + 3 = 0$

$\boxed{\text{問題 6}}$ [2 次超曲面]
以下の方程式が表す 2 次超曲面は何か？合同変換ではなく，アフィン変換で考え，大体の形をいえ．

(1) $x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx + 1 = 0$

(2) $xy + yz + zx - 2x - 3y + z - c = 0$ (教科書の例 8.1)

(3) $x^2 + 2xy + 4yz + 2zx - 3x + 2y - z = 0$ (教科書の例 8.2)

(4) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy - 2zx + 3x - y + 5z + 28 = 0$ (教科書の例 8.3)

以上のことで数学のことで質問がある場合、どんなことでも以下の数学手習塾が開催されているので利用すること。
2/6(木)：11:10〜12:10 場所 1E403
2/13(木)：11:10〜12:10 場所 1E403