$\boxed{\text{線形代数3}}$ 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第6回（'25年1月29日）

Def. $GL(n,\mathbb{R})$ を n 次の実数成分をもつ正則行列全体の集合とする．$O(n,\mathbb{R})$ を n 次の実数成分をもつ直交行列全体の集合とする．

Def. $\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)) \in M(n,\mathbb{R})$ を対角行列でその対角成分が λ_i となる行列とする．

Thm. 実対称行列 A に対して，ある直交行列 $R\in O(n,\mathbb{R})$ が存在して，$RA^tR=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ とすることができる．ただし，$\lambda_1,\cdots,\lambda_p>0, \lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}<0, \lambda_{p+q+1}=\cdots,\lambda_n=0$ を満たす．

Def. 対角行列 $J_{p,q}\in M(n,\mathbb{R})$ を $\mathrm{diag}(\overbrace{1,\cdots,1}^{p},\overbrace{-1,\cdots,-1}^{q},\overbrace{0,\cdots,0}^{n-p-q})$ とする．

定理 8.1[シルベスターの慣性法則] 実対称行列 A に対して，ある $R\in GL(n,\mathbb{R})$ が存在して，$RA^tR=J_{p,q}$ とすることができる．この p,q は対称行列 A に対して一意的に決まる．

Def. この整数の組 (p,q) を対称行列の**符号**という．

Thm. 対称行列 A の符号 (p,q) に対して p は A の正の固有値の数に等しく，q は負の固有値の数に等しい．

$x_1,\cdots,x_n$ に対して，それらを用いて，2 次式

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{1\le i,j\le n}a_{i,j}x_ix_j+\sum_{i=1}^n 2b_ix_i+c$$

を 2 次式といい，係数を $a_{i,j}=a_{j,i}$ として一般性を失わず，

$$F(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,\cdots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\sum_{i=1}^n 2b_ix_i+c=(x_1,\cdots,x_n,1)\begin{pmatrix}A&\boldsymbol{b}\\{}^t\boldsymbol{b}&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\\1\end{pmatrix}$$

として対称行列を用いて書くことができる．ここで，${}^t\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ とする．

R を正則行列とし，R の掛け算とベクトル $\boldsymbol{u}$ の平行移動の合成 $\boldsymbol{x}\mapsto R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}$ を**アフィン変換**という．アフィン変換の合成もアフィン変換であり，アフィン変換は，行列を用いて

$$\begin{pmatrix}R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R&\boldsymbol{u}\\{}^t\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}\\1\end{pmatrix}$$

とかける．R が正則であるとき、$\begin{pmatrix}R&\boldsymbol{u}\\{}^t\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}$ も正則である。また、R が直交行列であれば、$\begin{pmatrix}R&\boldsymbol{0}\\{}^t\boldsymbol{0}&1\end{pmatrix}$ も直交行列である。

$\boxed{\text{問題 1}}$ [実対称行列の固有値]
実対称行列は対角化できて、実数を固有値にもつ。なぜ実数に固有値を持つのか簡単に証明せよ。同様

に、交代行列は純虚数を固有値に持つのだがそれも証明できるか？

$\boxed{\text{問題 2}}$ [アフィン変換]
アフィン変換の合成もまたアフィン変換である。このことを式で証明せよ。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [対称行列の対角化]
次の行列を直交行列によって対角化せよ．また，符号を求めよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題 4}}$ [2 次超曲面の標準形]
次の 2 次式 $Q(x, y)$ を行列 A とベクトル $\boldsymbol{b}$ と定数 c を用いて表せ．

(1) $Q(x, y) = xy - 3$
(2) $Q(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2x + 4y + 3$
(3) $Q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 4y - 2$

学籍番号 (　　　　　　　　　　), (　　　　　　　　) 学類, 氏名 (　　　　　　　　　　　　)

必要であれば、裏面を用いても良い。

問題-6-1.

(1) A を実平方行列とする。A が実固有値をもち直交行列によって対角化できるとき、それは対称行列であるか？もしそうなら証明を与えよ。

(2) 下の行列 A は対角化可能かどうか判定せよ。また、直交行列によって対角可能かどうかも判定せよ。またその理由を記せ。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

問題-6-2.

P が直交行列であることと、P の縦ベクトルが正規直交ベクトルであることが同値であることを証明せよ。

問題-6-3.

次の対称行列の符号を求めよ.

(1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

裏を使っても良い。