線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第5回（'25年1月27日)

Def. 線形変換とは、ベクトル空間 V から V への線形写像のことである。線形変換は必ず 0 は 0 に写す。
$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする。線形変換 $f : V \to V$ に対して、

$$(f(\boldsymbol{v}_1), \cdots, f(\boldsymbol{v}_n)) = (\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n) \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

としたとき右に現れる行列 A を f の $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ に関する**表現行列**という。表現行列は基底に依存して決まるものである。

Def.
線形変換 $f : V \to V$ の**固有値**とは、$\mathrm{Ker}(f - \alpha I_V) \neq 0$ となる複素数 α のこと。$V_\alpha = \mathrm{Ker}(f - \alpha I_V)$ を固有値 α の**固有空間**という。f の表現行列を A とするとき、$\Phi_A(t) = \det(\alpha E - A)$ を固有多項式という。固有多項式は表現行列によらない。
また V_α の non-zero のベクトルを**固有ベクトル**という。
Def. $V \to V$ が**単純**であるとは、$f(v) = \alpha I_V$ となること。V が**半単純**とは、ある基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が存在して、f の表現行列が対角化可能であること。
定理 7.11. 以下が同値

(1) $f : V \to V$ が半単純

(2) V のある基底が存在して、その基底に関する表現行列が対角行列

(3) f の固有ベクトルからなる基底が存在する。

Def. $GL(n, \mathbb{R})$ を n 次の実数成分をもつ正則行列全体の集合とする．$O(n, \mathbb{R})$ を n 次の実数成分をもつ直交行列全体の集合とする．
Def. $\mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) \in M(n, \mathbb{R})$ を対角行列でその対角成分が λ_i となる行列とする．

Thm. 実対称行列 A に対して，ある直交行列 $R \in O(n, \mathbb{R})$ が存在して，$RA^tR = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ とすることができる．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_p > 0, \lambda_{p+1}, \cdots, \lambda_{p+q} < 0, \lambda_{p+q+1} = \cdots, \lambda_n = 0$ を満たす.

Def. 対角行列 $J_{p,q} \in M(n, \mathbb{R})$ を $\mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{p}, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{q}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-p-q})$ とする．

問題 1 [ベクトル空間]
$\mathbb{R}[X]_n = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots + a_nX^n | a_i \in \mathbb{R}\}$ とおくとき、$\mathbb{R}[X]_n$ はベクトル空間としての和とスカラー倍は何か？考えよ。例えば、$\mathbb{R}[X]_2$ の元 X と $1 + X + X^2$ のベクトルとしての和とスカラー倍とは何か？また、$\mathbb{R}[X]_2$ と 3 次元の数ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ はどのように同じと見なせるだろうか？説明せよ。

$\boxed{\text{問題 2}}$ [線形変換の表現行列]
次の線形変換の表す表現行列を求め，その固有値と固有空間の基底を求めよ．
(1) $V = \mathbb{R}[X]_1, f : V \to V$ を $f(F(X)) = F(2 - X)$
(2) $V = \mathbb{R}[X]_2, f : V \to V$ を $f(F(X)) = F(1 - X)$
(3) $V = \mathbb{R}[X]_2, f : V \to V$ を $f(F(X)) = (1 - X)\dfrac{d}{dX}F(X)$

$\boxed{\text{問題 3}}$ [半単純性]
上記の線形変換 (1),(2),(3) は半単純かどうか判定せよ。

定理 7.9. 任意の線形変換 $f : V \to V$ に対して，ある基底 $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が存在して，$f(\boldsymbol{v}_i) \in \langle \boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_i \rangle$ が成り立つ．

$$V = \{(a_1, a_2, a_3, \cdots) | a_n \in \mathbb{R}\}$$

を数列の空間であり，自然にベクトル空間の構造を持つ．次元は無限大である．

$$W = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots,) \in V | a_n = ca_{n-1} + da_{n-2}\}$$

は V の部分ベクトル空間であり，$(1, 0, d, \cdots)$ と $(0, 1, c, \cdots)$ が基底となる．

$\boxed{\text{問題 4}}$ [表現行列]
上の数列の空間 V の部分空間 W に対して次の線形変換 $f : W \to W$ は半単純か．
(1) $W = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots,) \in V | a_n = a_{n-1} + a_{n-2}\}$, $f(a_1, a_2, \cdots) = (a_2, a_3, \cdots)$
(2) $W = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots,) \in V | a_n = -2a_{n-1} + 3a_{n-2}\}$, $f(a_1, a_2, \cdots) = (a_2, a_3, \cdots)$