# 線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第4回（'25年1月22日)

問題 1 [GS 直交化]

次のベクトルをこの順番に GS 直交化の方法を当てはめることで正規直交ベクトルにせよ。順番を適宜変えて得られたものは無効とする。

(1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

問題 2 [前回の復習]

**問題.** 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

この問題の場合、固有値 $\lambda$ の固有ベクトルとして次のどちらを求めるべきか？

- $\lambda$ の固有ベクトルとしてありうるもの全てを列挙する必要がある。
- $\lambda$ の固有ベクトルとして満たすものを 1 つあげればよい。
- $\lambda$ の固有空間の基底を 1 つあげればよい。

問題 3 [表現行列の復習]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とする。線形変換 $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を $3 \times 3$ 行列 $A$ を用いて $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{v} \to A\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$ によって得られるものとする。今、基底 $\boldsymbol{v}_1 = {}^t(1,1,0), \boldsymbol{v}_2 = {}^t(1,0,0), \boldsymbol{v}_3 = {}^t(0,1,1)$ とするとき、この基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ によって表現される $f$ の表現行列を求めよ。

$\boxed{\text{問題 4}}$ [直交化]

以下の問題を解け．ただし正規化する必要はない．

(1) 次のベクトルにグラムシュミットの直交化を用いて直交基底を構成せよ．

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$$

(2) ベクトル空間 $V$ の部分ベクトル空間 $W$ の $W^{\perp}$ の直交基底を求めよ．

$$V = \mathbb{R}^3,\ W = \left\langle \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} \right\rangle$$

$\boxed{\text{問題 5}}$ [ユニタリ行列による対角化]

以下の行列をユニタリ行列によって対角化せよ。

$$\begin{pmatrix}0 & i & 1\\ -i & 0 & i\\ 1 & -i & 0\end{pmatrix}$$

学籍番号 (　　　　　　　　　　　), (　　　　　　　　　) 学類, 氏名 (　　　　　　　　　　　　　　)

必要であれば、裏面を用いても良い。

## 問題-4-1.

(1) 次の行列をユニタリ行列によって対角化であることを定理を用いることで簡単に示せ。

(2) 対角化に用いられるユニタリ行列を 1 つ求めよ。

$$\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$$

## 問題-4-2.

$W \subset \mathbb{C}^3$ を $W = \langle {}^t(1,1,1) \rangle$ とするとき、$W$ の直交補空間の正規直交基底を 1 つ求めよ。

(基底を 1 つ求めるとは、ベクトルを 1 つだけ求めることだろうか？それともベクトルの組みを 1 つ求めることだろうか？)

## 問題-4-3.

次の行列が対角化可能であるような複素数 $a, b, c$ を理由とともに求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$