線形代数3 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第3回（'25 年 1 月 15 日)

Def.
$A \in M(n, \mathbb{C})$ とする．

$$A^* := {}^t\bar{A}$$

標準内積 $(\cdot, \cdot)$ を以下で定める．

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\bar{\boldsymbol{b}} = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$$

Thm. $A \in M(n, \mathbb{C})$ が相異なる n 個の固有値を持つとき，A は対角化可能である．
$(\because)\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を A の異なる固有値とする．このとき，固有空間だから V_{α_i} の次元は 1 以上．よって，$W =: V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_n} \subset \mathbb{C}^n$ の W は n 次元以上となる．$\mathbb{C}^n$ の部分空間だからちょうど n 次元となる．よって，$V_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus V_{\alpha_n} = \mathbb{C}^n$ よって，A は対角化可能．

Fact. $W \subset V$ かつ $\dim V = \dim W$ なら $V = W$ である．
(今日やること)
Def.
$A \in M(n, \mathbb{C})$ とする．

$$A \text{ は正規行列} \Leftrightarrow A^*A = AA^*$$
$$A \text{ はユニタリ行列} \Leftrightarrow A^*A = E$$
$$A \text{ はエルミート行列} \Leftrightarrow A^* = A \quad A \text{ は歪エルミート行列} \Leftrightarrow A^* = -A$$

$A \in M(n, \mathbb{R})$ とする．

$$A \text{ は対称行列} \Leftrightarrow {}^tA = A$$
$$A \text{ は交代行列} \Leftrightarrow {}^tA = -A$$
$$A \text{ は直交行列} \Leftrightarrow {}^tAA = E$$

正規行列はユニタリ行列によって対角化可能！
対称行列は直交行列によって対角化可能！

特に対称行列は対角化可能.

定理 7.4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^n$ と $\mathbb{C}^n$ の標準内積 $(\cdot, \cdot)$ に対して次が成り立つ．

$$(A\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, A^*\boldsymbol{b})$$

Thm. $A \in M(n, \mathbb{C})$ が正規行列のとき，$A\boldsymbol{p} = \alpha\boldsymbol{p}$ ならば，$A^*\boldsymbol{p} = \bar{\alpha}\boldsymbol{p}$
Thm. $A \in M(n, \mathbb{C})$ はエルミート行列もしくは，$A \in M(n, \mathbb{R})$ が対称行列の場合，固有値は実数．$A \in M(n, \mathbb{C})$ は歪エルミート行列もしくは，$A \in M(n, \mathbb{R})$ が交代行列の場合，固有値は純虚数．ユニタリ行列もしくは直交行列の固有値は長さが 1 の複素数，つまり，$\mathbb{C}$ の単位円上にある．

定理 7.5. $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) \in M(n, \mathbb{C})$ に対して次が同値.

- A はユニタリ行列である

- $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は複素内積空間における正規直交基底である．
- A は標準内積を保つ．つまり，$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が成り立つ．

定理 7.5'. $A = (\boldsymbol{a}_1 \cdots \boldsymbol{a}_n) \in M(n, \mathbb{R})$ に対して次が同値.

- A は直交行列である
- $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ は実内積空間における正規直交基底である．
- A は標準内積を保つ．つまり，$(A\boldsymbol{a}, A\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ が成り立つ．

定理 7.6. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して次が同値である．

- A は正規空間である．
- A はユニタリー行列によって対角化できる．

$\boxed{\text{問題 1}}$ [対称行列の対角化]
$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする．このとき，A は対角化できるか判定せよ．もし対角化できるなら，その固有ベクトルを求め，対角化する正則行列を求めよ．

$\boxed{\text{問題 2}}$ [対称行列の対角化]
次の行列の固有値と固有空間の基底を求め，直交行列によって対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{問題 3}}$ [エルミート行列の対角化]
次の行列の固有値と固有空間の基底を求め，ユニタリ行列によって対角化せよ．

(1) $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -i \\ 0 & i & 2 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 0 & i & 1 \\ -i & 0 & i \\ 1 & -i & 0 \end{pmatrix}$

問題 1 の固有値

$\{3, 1\}$

問題 2 の固有値

(1) $\{0, 3\}$

(2) $\{-1, 2\}$

(3) $\{\pm 2\sqrt{2}, 2\}$

問題 3 の固有値

(1) $\{0, 3\}$

(2) $\{3, -1\}$

(3) $\{-2, 1\}$