$\boxed{\text{線形代数3}}$ 担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 2 回（'25 年 1 月 8 日）

$\boxed{\text{問題 1}}$ [固有値と固有ベクトル]
以下を埋めよ。
「A を正方行列とする。(　　　　　　　　　) を満たす (　　　　　　　　　) な $\boldsymbol{v}$ が存在するとき、$\boldsymbol{v}$ を固有ベクトルといい、λ を固有値という。」
「$A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，(　　　　　　　　　) を固有多項式といい，$\Phi_A(t)$ で表す。λ が (　　　　　　　) であることと $\Phi_A(t) = 0$ の解であることは同値である．α を固有値として，$V_\alpha = \{v \in \mathbb{C}^n \mid ($　　　　　　　　　$)\}$ とおき，V_α を α に関する固有空間という.」
「$\mathrm{Ker}(L_{\alpha E - A}) = V_\alpha$ である。」

$\boxed{\text{問題 2}}$ [固有値]
「$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ をみたす λ, v を固有値、固有ベクトルという。」という文言で固有値と固有ベクトルとの定義で正しいか？もし正しくないとするとなぜ正しくないか答えよ。

$\boxed{\text{問題 3}}$ [固有値]
固有値 λ に対して固有空間 V_λ は 0 次元ではない。つまり、$\{0\}$ ではない。どうしてか？証明せよ。

定理 7.1. 次が同値である.

(1) $\Phi_A(\alpha) = 0$.

(2) $\mathrm{Ker}(L_{\alpha E - A}) \neq \{\mathbf{0}\}$.

定理 7.3. $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して，A の固有値を $\beta_1, \cdots, \beta_r$ とする．このとき以下は同値.

(1) A が対角化可能である.

(2) $\mathbb{C}^n = V_{\beta_1} \oplus \cdots \oplus V_{\beta_r}$ である.

(3) A は固有ベクトルからなる $\mathbb{C}^n$ の基底が存在する.

$\boxed{問題 4}$ [固有値と固有ベクトル]
次の行列の固有値と固有空間の基底を求めよ．固有空間がゼロ次元ではないことを確かめることで定理 7.1 が成り立っていることを確かめよ．

(1) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ (6) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\boxed{問題 5}$ [固有値と固有ベクトル]
上の問題の行列は対角化できるか？もしできれば，$P^{-1}AP = D$ が対角行列となるような P を求めよ．

学籍番号 (　　　　　　　　　　), (　　　　　　　) 学類, 氏名 (　　　　　　　　　　)

問題-2-1.

次のベクトルをこの順番に GS 直交化の方法を当てはめることで正規直交ベクトルにせよ。順番を適宜変えて得られたものは無効とする。

(1) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$　　(2) $\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

問題-2-2.

次の行列の固有値と固有空間を求め、その基底をそれぞれ求めよ。ここで、1 の 3 乗根のうち実数でないものを ω として計算せよ。計算の結果、固有空間が $\{0\}$ となった場合、この問題の点数を 0 点とする。

(1) $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\1 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0\end{pmatrix}$