

第5回 ('24年11月1日 : Keywords ... テイラーの定理)**問い-5-1.**

関数 $z = f(x, y)$ の勾配ベクトルを $\nabla f(x, y) = (f_x(x, y), f_y(x, y))$ とおく。 $F(u, v) = (f(x(u, v), y(u, v)))$ とするとき、

$$\nabla F(u, v) = \nabla f(x, y) \cdot J$$

を示せ。ここで $J = D(\Phi)$ は変数変換 $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ のヤコビ行列である。

問い-5-2.

$x(r, \theta) = r \cos \theta$, $y(r, \theta) = r \sin \theta$ であるとき、2変数関数 $f(x, y)$ について、 $F(r, \theta)$ を上記と同様のものとするとき、 $\nabla F(u, v)$ と $\nabla f(x, y)$ を計算することで、上の公式が成り立つことを示せ。

問い-5-3.

次の関数 $f(x, y) = x^3y^2 + 3xy^2$ とする。その高階導関数 f_{xx}, f_{xy}, f_{yy} を計算せよ。

問い-5-4.

$F(t) = f(a + t\Delta x, b + t\Delta y)$ であるとき、

(1) $F'(0)$ を $\nabla f(a, b) = (f_x(a, b), f_y(a, b))$ を用いて記述せよ。

(2) $F''(0)$ を $A = f_{xx}(a, b)$, $B = f_{xy}(a, b)$, $C = f_{yy}(a, b)$ を用いて記述せよ。

問い-5-5.

2変数の2次のテイラーの定理の内容を示せ。

問い-5-6.

2変数の2次のテイラーの定理の漸近展開を示せ。

問い-5-7.

次の2変数関数のテイラー展開を (a, b) において2次まで求めよ。

(1) $f(x, y) = e^{xy}$, $(a, b) = (1, 1)$ (2) $f(x, y) = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$, $(a, b) = (0, 0)$

