微積分 2

担当 丹下 基生：研究室 (B715) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第 4 回（'24 年 10 月 25 日：Keywords ··· 多変数関数の合成関数の微分法)

問い-4-1.
関数 $z = f(x, y)$ に関する等高線上に曲線 $(x(t), y(t))$ が走っているとき、その曲線に沿った関数 $z(t) = f(x(t), y(t))$ とはどういう関数であるか？

問い-4-2.
関数 $f(x, y)$ での上記の曲線 $(x(t), y(t))$ での関数 $z(t)$ の微分が 0 であることと勾配ベクトル $(A(t), B(t))$ と曲線の接線方向が直交することを等高線を用いて説明せよ。

問題-4-3.
ある C^1 級関数 $z = f(x, y)$ を用いて得られる以下の関数の t による導関数を f_x や f_y を用いて求めよ。
(i) $f(t^2, f(t, t))$　(ii) $e^{-t} f(e^t, e^t)$　(iii) $\log f(t, 1 - t)$

問い-4-4.
$x = x(u, v)$ と $y = y(u, v)$ となる変数変換 Φ に対して、Φ のヤコビ行列を x, y の u, v の偏微分を用いて表せ。

問題-4-5.

以下の変数変換のヤコビ行列を求めよ。

(i) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$　(ii) $x = u + v, y = uv$　(iii) $x = 2u + v, y = u - v$

問い-4-6.

変数変換 $(x, y) = \Phi(u, v)$ と $(z, w) = \Psi(x, y)$ の合成のヤコビ行列は、それぞれのヤコビ行列の積になることを確かめよ。つまり、

$$D(\Psi \circ \Phi) = D(\Psi) \cdot D(\Phi)$$

が成り立つ。この式は、

$$(z, w) = \Psi(\Phi(u, v)) = (z(x(u, v), y(u, v)), w(x(u, v), y(u, v)))$$

をそれぞれ u, v で微分することで求めよ。例えば以下を示せ。

$$z_u = z_x(x(p, q), y(p, q))x_u(p, q) + z_y(x(p, q), y(p, q))y_u(p, q)$$