トポロジーI演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第9回（'13年6月17日：Keyword ··· 分離公理）

定義9 **連続関数で分離可能** 部分集合 $A, B \subset X$ が関数で分離可能とは、その2つの部分集合に対してある連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ があって、$f(A) = \{0\}$ であり、$f(B) = \{1\}$ となることをいう.

分離公理2

$T_{2\frac{1}{2}}$: 完全ハウスドルフ（ウリゾーン空間）相異なる2点が閉近傍で分離可能．完全ハウスドルフ: 相異なる2点が連続関数で分離可能 $T_{3\frac{1}{2}}$: 完全正則空間（チコノフ空間）連続関数で任意の点と任意の閉集合が分離できる

T_5: 全部分正規空間（completely regular 遺伝的正規）全ての部分集合が正規空間となる正規空間．もしくは separated な集合が開集合で分離可能

完全正規空間（perfectly normal, perfectly T_4）．任意の閉集合 F に対して連続写像 $f : X \to I$ が存在して、$F = f^{-1}(0)$ となる．もしくは任意の閉集合が G_δ 集合

商写像 (quotient map) 全射 $f : X \to Y$ が $U \in \mathcal{O}_Y \Leftrightarrow f^{-1}(U) \in \mathcal{O}_X$ となるとき、f を商写像という.

問題60 [**演習11.1（酒井）**] ハウスドルフ空間 X において収束する点列の極限は一意に決まることを示せ.

問題61 [**演習11.3(酒井)**] $T_i(i = 2, 3, 3\frac{1}{2})$ とする．T_i は部分空間で保たれる（遺伝的である）ことを示せ.

問題62 [**演習11.3(酒井)**] $T_i(i = 2, 3, 3\frac{1}{2})$ とする．T_i は積空間で保たれることを示せ.

問題63 [**演習11.4(酒井)**] T_4 空間は閉部分集合にたいして保たれる（弱遺伝的である）ことを示せ.

大学数学を楽しむためにはその8（創造力）

「オリジナリティを生かすには」

オリジナリティを生むということは厳密に言ってかなり難しいことである．ピタゴラスが数学という学問を開いたとすれば2500年余りこの地球上で数学を考えている人はいる．その人たちを差し置いて新しい数学を作ったり考え方を得るということはかなり難しい．しかし、オリジナリティに見えることはいくつかできる．つまり、適用ということである．ある分野で使われ、開発された手法をそれを知らない他の分野に適用させるのである．このようなことは真のオリジナリティとは言われないにしても新しい分野を開拓したということにはなる．近いところでは代数幾何学の分野を数論に応用させるためにスキーム論を作ったり、また、蛍光たんぱく質の発見など基礎的研究が医療で役立ったりしている.

第7回

問題1 積位相 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ は $\{\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U_\lambda) | \forall U_\lambda \in \mathcal{O}_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda\}$ で生成される位相.

問題2 $\mathbb{N}$ と X は $\mathbb{R}$ 上の距離位相から誘導されるからそれらは距離空間である．$\forall n \in \mathbb{N}$ に対して、$B(n, 1/2) = \{n\}$ であるから、$\mathbb{N}$ は離散位相．$\forall 1/n \in X$ に対して、$B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \{1/n\}$ であるから、X は離散位相．ここで、$f : \mathbb{N} \to X$ に対して、$f(n) = \frac{1}{n}$ とする．f は全単射（略）であり f^{-1} も写像．f, f^{-1} は離散空間の間の写像なので連続．ゆえに、f は同相.

問題3 (1) 距離であることは $d((x_n), (y_n)) \geq 0$ であり、等号成立は $(x_n) = (y_n)$ のときのみ．また、$d((x_n), (y_n)) = d((y_n), (x_n))$、$d((x_n), (y_n)) + d((y_n), (z_n)) \leq d((x_n), (z_n))$ を満たすことを示せばよい（略）.

(2) 任意の $\epsilon > 0$ に対して、$\frac{1}{2^k} < \epsilon$ となる k が存在する（アルキメデスの原理）．このとき、任意の $(x_n) \in C$ に対して、$y_n = \begin{cases} 1 - x_k & n = k \\ x_n & o/w \end{cases}$ とおく．このとき、$d((x_n), (y_n)) = \frac{|x_k - y_k|}{2^k} = \frac{1}{2^k} < \epsilon$ となり、$B((x_n), \epsilon) \ni (y_n) \neq (x_n)$ となる．C に問題のような位相を入れた場合、離散空間であるなら、各 (x_n) に対して $B((x_n), \epsilon) = \{(x_n)\}$ となる ϵ が存在することになるが上記のことからそのような $\epsilon > 0$ は存在しない．ゆえにこの位相空間は離散位相では

ない．

問題 4 もし $f(\mathbb{Z}) \subset S^1$ が稠密でないとすると、S^1 上のある弧 $A(\theta_1, \theta_2) = \{(\cos 2\pi\theta, \sin 2\pi\theta) | \theta_1 < \theta < \theta_2\}$ が存在し、$A(\theta_1, \theta_2) \cap f(\mathbb{Z}) = \emptyset$ となる．ここで、$\theta_1 = \inf\{\eta | A(\eta, \theta_2) \cap f(\mathbb{Z}) = \emptyset\}$ かつ $\theta_2 = \sup\{\eta | A(\theta_1, \eta) \cap f(\mathbb{Z}) = \emptyset\}$ としておく．ここで、S^1 を角度 $2\pi a$ だけ回す操作を ϕ_a とおくと、$\phi_a(A(\theta_1, \theta_2)) = A(\theta_1 + a, \theta_2 + a)$ も明らかに $\phi_a(A(\theta_1, \theta_2)) \cap f(\mathbb{Z}) = \emptyset$ がいえる．また、θ_1, θ_2 の決め方から $A(\theta_1, \theta_2) \cap A(\theta_1 + a, \theta_2 + a) \neq \emptyset$ がいえる．これを繰り返すと、任意の整数 n に対して、$\{\phi_a^n(A(\theta_1, \theta_2)) = A(\theta_1 + na, \theta_2 + na)\}$ お互いに交わらない S^1 の領域で、かつ $f(\mathbb{Z})$ とも交わらない．これらの円弧の長さを全て足すと無限にになるが、S^1 の長さは有限なのでこれは矛盾する．

（注意１：正確にはこの証明のためには円を距離空間としての長さ、またそこから誘導される測度（この場合距離）の概念が必要である.）

（注意２：この問題はポアンカレの再帰定理と呼ばれる現象として一般化される.）

Homepage：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html`
Twitter：**BasicMathIIB** (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.