

# トポロジー I 演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第 8 回 ('13 年 6 月 10 日 : Keyword ... 分離公理)

**定義 8** アニュラス (annulus) ...  $I = [0, 1]$  として、 $I \times I$  に対して、 $(0, x) \sim (1, x)$  となる同一視を入れた商空間をアニュラスといい、 $A^2$  とかく。 $A^2$  は  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1, |z| \leq 1\}$  と同相である。

球面 (sphere) ...  $\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$  となる空間を  $n$  次元球面という。

実 (or 複素) 射影空間 (real (complex) projective space) ...  $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$  (or  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ ) に対して、同値関係を

$$(x_0, x_1, \dots, x_n) \sim (y_0, y_1, \dots, y_n) \Leftrightarrow (x_0, \dots, x_n) = (ry_1, ry_2, \dots, ry_n) \text{ where } r \in \mathbb{R}(\text{or } \mathbb{C})$$

として定義する。このとき、 $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$  (or  $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$ ) を  $n$  次元実 (or 複素) 射影空間といい  $\mathbb{R}P^n$  (or  $\mathbb{C}P^n$ ) とかく。 $\mathbb{R}P^1$  (or  $\mathbb{C}P^1$ ) のことを実 (or 複素) 射影直線といい、 $\mathbb{R}P^2$  (or  $\mathbb{C}P^2$ ) のことを実 (or 複素) 射影平面という。

分離公理 (separation axioms) ... 空間のある交わらない 2 つの部分集合がそれらをそれぞれ覆い、かつ互いに交わらない 2 つの開集合がとれるとき、その交わらない 2 つの部分集合は開集合で分離可能という。空間の部分集合がどのように分離可能であるか以下のような定義が一般的である。他にも分離公理は存在する。

$T_0$ :  $p \neq q$  となる  $p, q \in X$  に対して、ある開集合  $U$  があって  $p \in U \not\ni q$  もしくは  $p \notin U \ni q$  がなりたつ。

$T_1$ :  $p \neq q$  となる  $p, q \in X$  に対して、ある開集合  $U$  があって  $p \in U \not\ni q$  かつ  $p \notin U \ni q$  がなりたつ。

$T_2$ :  $p, q$  が開集合で分離可能 (ハウスドルフ空間)

$T_3$ : 任意の閉集合とそれに属さない任意の点が開集合で分離可能 (正則空間)

$T_4$ : 任意の交わらない 2 つの閉集合が開集合で分離可能 (正規空間)

注)  $T_1$  かつ正則空間を正則空間ということもある。 $T_1$  かつ正規空間を正規空間ということもある。

**問題 52** [演習 9.3(酒井)] アニュラス  $A^2$  を  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ , 外側の境界  $S^1 = \{(x, y) \in A^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  を 1 点につぶして出来る商空間  $A^2/S^1$  は、単位円板  $B^2$  と同相であることを示せ。このとき、つぶす境界を内側にしても同じであることをしめせ。

**問題 53** [演習 9.4(酒井)] 単位円板  $B^2$  において、境界の単位円周  $S^1 = \partial B^2$  を 1 点につぶして出来る商空間  $B^2/S^1$  は、球面  $S^2$  と同相であることを示せ。

**問題 54** [例 20.2 参照] クラインの壺を定義せよ。また、空間の向きを数学的に定義することで、その空間がどうして向きがつけられないか説明せよ。空間の向きについては、位相曲面における向きの定義で構わない。

**問題 55** [問 21.1] ハウスドルフ空間の一点集合は常に閉集合であり、正規ハウスドルフ空間は正則空間であることを示せ。

**問題 56** [問 21.2] 距離位相は常にハウスドルフ空間であり、正規空間であることを示せ。

**問題 57** ゾルゲンフライ直線は正規であることを示せ。

**問題 58** ハウスドルフ空間の直積、また部分空間はまたハウスドルフになることを示せ。

**問題 59** ハウスドルフ空間の商空間がハウスドルフにならない例を示せ。

「処理能力の早さと数学を獲得する力」

数学の概念や定理はいずれは完全に理解しなければならないが、それがなかなかできないからといって即座に自分は数学ができないと思うことはない。自分は数学が好きなのに数学が定理がなかなか分からなかったり、そんなとき、そうでもない友達に一瞬で教えられたりして落ち込むことがある。私もそのような経験は数多くした(実は今でもそうだ。)しかしそうした数学に執着しない友達はどこかで、数学の勉強や研究をあきらめたり止めたりしている。大事なのは、数学が好きであることに自信があり、諦めたくないなら、基本的な数学の定義や定理など自分の中に着実に積み上げていくことである。理解が多少遅くても、自分なりに数学の理解を深めることで、大数学者になった人は大勢いる。

Homepage : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html>

Twitter : **BasicMathIIB** (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください。携帯からでも OK です。