

# トポロジー I 演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第6回 ('13年5月27日 : Keyword ... 商空間)

**定義 6** 商空間 (quotient space)  $(X, \mathcal{O})$  を位相空間とする .  $X$  に同値関係  $\sigma$  が与えられているとする . このとき、商集合  $X/\sigma$  に自然な全射  $p: X \rightarrow X/\sigma$  を  $p(x) := [x]$  として定める .  $[x]$  は  $x$  を含む同値類 . この写像  $p$  に関して  $X/\sigma$  上に商位相  $\mathcal{O}(\sigma)$  を入れる . この位相空間  $(X/\sigma, \mathcal{O}(\sigma))$  を商空間という . 商空間を  $X/p$  とかくこともある . 同値関係を入れるとき、ある点  $x, y \in X$  に対して同一視  $x \sim y$  を入れるということもある .

位相的曲面 (surface) ある位相空間  $\Sigma$  が各点  $p$  において、通常の  $\mathbb{R}^2$  の開集合と同相な近傍を持つことができるとき、 $\Sigma$  を位相的曲面という . トーラスや球面  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  は位相的曲面ある .

**定理 6-1** [定理 9.6(酒井)] 商写像  $f: X \rightarrow Y$  に対して、 $\tilde{f}: X/f \rightarrow Y$  を  $\tilde{f}(f^{-1}(y)) = y$  ( $y \in Y$ ) と定義すると  $\tilde{f}$  は同相写像となる . また、 $q_f: X \rightarrow X/f$  を商空間  $X/f$  の商写像とすれば、 $\tilde{f} \circ q_f = f$  を満たす .

$$\begin{array}{ccc}
 X & & \\
 q_f \downarrow & \searrow f & \\
 X/f & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y
 \end{array}$$

**定理 6-2** [定理 8.13(酒井)]  $\Lambda$  を可算集合とする . 積空間  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  が第一可算 (第二可算、及び可分) であるためには任意の  $\lambda \in \Lambda$  に対して  $X_\lambda$  が第一可算 (第二可算、及び可分) であることが必要十分である .

**問題 46** [例 20.1 参照]  $S^1$  を  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1\}$  として、 $\mathbb{R}^2$  の相対位相を入れておく . また、 $f: \mathbb{R} \rightarrow S^1$  を  $f(\theta) = (\cos \pi \theta, \sin \pi \theta)$  とおき、 $\mathbb{R}$  の通常の距離位相から誘導される位相を  $S^1$  に入れる . このとき、 $S^1$  上の2つの位相は同値であることを示せ .

**問題 47** カントール集合  $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} = \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \dots$  に対して、ある2以上の整数  $r$  に対して、

$$\begin{aligned}
 \varphi_r: \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} &\rightarrow [0, 1] \\
 \varphi_r(\{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}_{n \geq 1}}) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r-1}{r^n} a_n
 \end{aligned}$$

と置く . このとき、 $\varphi_2$  は単射ではないが全射であり、 $\varphi_r$  ( $r \geq 3$ ) なら全射ではないが単射であることを示せ .

**問題 48** [定理 8.14(酒井) の下の注]  $\Lambda$  が非可算集合とするとき、 $X_\lambda$  は密着位相ではなく、 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  が可分となることがあることを示せ .

**問題 49** [トーラス] 通常のユークリッド空間  $\mathbb{R}^2$  上に同値関係、 $(x_1, y_1) \sim_1 (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 - x_2, y_1 - y_2) \in \mathbb{Z}^2$  をとる . また、 $[0, 1]^2$  上に同一視、 $(1, y) \sim_2 (0, y)$ 、 $(x, 0) \sim_2 (x, 1)$  を入れる . このとき、 $\mathbb{R}^2 / \sim_1$  と  $I^2 / \sim_2$  は同相であることを示せ . この空間のことをトーラスという .

**問題 50** [トーラス =  $S^1 \times S^1$ ] トーラスは積空間  $S^1 \times S^1$  と同相であることを示せ .

**問題 51** [トーラスの1次変換]  $T^2 := \mathbb{R}^2 / \sim_1 = S^1 \times S^1$  と置く .  $A \in SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$  に対して、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in T^2$  に対して、変換  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  はトーラス上の同相写像を与えることを示せ .

「数学書との上手な付き合い方」

数学の本を（教科書でも演習書でも）一冊読み切るとは並大抵ではない（あなたが天才でなければ）途中で分からなくなったり進まなくて投げ出したくなることはある．そんなとき、なんとか最後まで行くための方法は次の2種類．

- (a) それでも頑張って読み続ける・・・この方法がうまくいくのは、それ以前に自分に暗示が掛けられているときである．つまりこの本を読むと自分の中で素晴らしく数学の世界が開けると思いこめるとき．そしてどんなことがあってもやらなければならないと自分に思い込ませるのである．そうすれば極限状態で道が開ける．
- (b) 一旦距離をおく・・・この方法でうまくいくのは、この本は自分にはきっといつか理解できるという確信をもたせるときである．そうすれば、本棚に一旦しまっても、不意に目にとまった時に、フッと理解できる時がある．そのためにはたまに本を忘れてぼんやり考える必要もある．

Homepage : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html>

Twitter : **BasicMathIIB** (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です．