トポロジーI演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第4回（'13年5月13日：Keyword ⋯ 積位相）

定義 4 **積位相**（product topology）$(X, \mathcal{O}_\lambda)$ $(\lambda \in \Lambda)$ を位相空間とする．$\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ 上の開集合 W を

$$\forall x \in W, \ \ \exists \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda, \exists U_i; \text{ open in } X_{\lambda_i} \text{ s.t. } x \in \mathrm{pr}_{\lambda_1}^{-1}(U_1) \cap \cdots \cap \mathrm{pr}_{\lambda_n}^{-1}(U_n) \subset W$$

とする．すなわち、

$$\mathcal{S} = \{\mathrm{pr}_\lambda^{-1}(U) | \lambda \in \Lambda, U \text{ open in } X_\lambda\}$$

が準開基になる．このような位相を積位相といい、$※_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ と表す.（教科書の記号）

問題 32 積空間 $(\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, ※_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda)$ の積位相 $※_{\lambda\in\Lambda}\mathcal{O}_\lambda$ は射影 $\mathrm{pr}_\lambda : \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \to X_\lambda$ が連続写像となる $\prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ の位相の中で最小の位相であることを示せ.

問題 33 [**問 19.3**] $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．$\Delta : X \to X \times X$ を対角線写像、すなわち $\Delta(x) = (x, x)$ $(x \in X)$ とする．Δ は位相空間 $(X, \mathcal{O})$ から積空間 $(X, \mathcal{O}) \times (X, \mathcal{O})$ への連続写像であることを示せ.

問題 34 [**命題 8.2(1)（酒井）**] $W \subset X \times Y$ が $(x, y) \in X \times Y$ の近傍となるためには、次の条件を満たすことが必要十分である.

$$\exists U \in \mathrm{Nbd}_X(x), \exists V \in \mathrm{Nbd}_Y(y) \text{ s.t } U \times V \subset W$$

問題 35 [**命題 8.2(2)（酒井）**]
$X \times Y$ における点列 $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $(x, y) \in X \times Y$ に収束するためには $x_n \to x$ $(n \to \infty)$ および、$(y_n \to y)$ $(n \to \infty)$ となることが必要十分である.

問題 36 [**命題 8.2(3)（酒井）**]
射影 $\mathrm{pr}_X : X \times Y \to X$, $\mathrm{pr}_Y : X \times Y \to Y$ は連続な開写像である.

問題 37 [**命題 8.2(4)（酒井）**] 位相空間 Z からの写像 $f : Z \to X \times Y$ が（$z \in Z$ において）連続になるためには、$\mathrm{pr}_X \circ f$ と $\mathrm{pr}_Y \circ f$ が共に（$z \in Z$ において）連続となることが必要十分であることである．すなわち、

$$f : \text{連続 (at } z \in Z) \Leftrightarrow \mathrm{pr}_X \circ f, \mathrm{pr}_Y \circ f \text{ が共に連続 (at } z \in Z)$$

問題 38 [**命題 8.2(5)（酒井）**] 任意の点 $x \in X$, $y \in Y$ に対して、$X \times Y$ の部分空間 $\{x\} \times Y$, $X \times \{y\}$ はそれぞれ Y および、X の同相である．すなわち、$\{x\} \times Y \approx Y, X \times \{y\} \approx X$.

大学数学を楽しむためにはその 3（抽象化と具体化）

「抽象から具体へ、具体から抽象へ.」

概念は普通抽象化されていますが、それをどう使っていいのか最初は分かりません．例えば、抽象ベクトル空間は数ベクトル空間で表現をすることを思い出して下さい．つまり、抽象ベクトル空間を数ベクトル空間とのある同一視（同型写像）を通してベクトル空間を具体化します．微分方程式の解空間、多様体の接空間などいろんなところに抽象ベクトル空間がありますが、それをある基底を適当に導入することで数ベクトル空間と同一視するのです．そうすれば、関数空間などもベクトルですから、線形作用素（積分作用素など）は単なる行列のオバケ（大抵無限次元なので）だと考えられます.
逆にいろいろある状況から何か普遍的なものを取り出したいとき、そのための思考法として、同一視、抽象化があります．多項式全体 $\mathbb{C}[x]$ を数ベクトル空間と思えるためにはある同一視が必要です．そしてそのためにはベクトル空間という抽象化が必要です．抽象化はいろいろな概念をひとまとめにする性質があります．例として置換、あみだくじ、n 点の間の全単射．これは結局 1 つの対称群という言葉で抽象化されます．群という構造もそれ自体、”変換”を抽象化してできた概念です．抽象化がうまくできれば、もう一度戻って最も計算しやすいものを選んで話を進めればよいのです.

Homepage：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html`
Twitter：**BasicMathIIB** (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.