# トポロジーⅠ演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第3回（'13年5月7日：Keywords $\cdots$ 位相空間、近傍）

定義3 **準開基**（open subbase）$\cdots$ $X$ の開集合の族 $\mathcal{S}$ で、$\mathcal{S}$ に属す有限個の開集合の共通部分全体が開基となるものを $X$ の準開基と呼ぶ．すなわち、

$$\mathcal{S} \text{ が } X \text{ の準開基である}$$

$$\Leftrightarrow \{V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n | n \in \mathbb{N}, V_1, V_2, \cdots, V_n\} \text{ が } X \text{ の開基}$$

**位相不変量** $\cdots$ 同相という関係によって保たれる位相空間に関する性質を位相不変量という．

**ゾルゲンフライ直線** $\cdots$ 右半開区間全体 $\{[a,b)|a<b\}$ によって生成される $\mathbb{R}$ 上の位相を右半開区間位相と呼び、この位相をもつ $\mathbb{R}$ を $\mathbb{R}_S$ と表し、ゾルゲンフライ直線と呼ぶ．

**収束** $\cdots$ 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の点列 $x_n \in X$ が $x \in X$ に収束するとは、任意の $U \in \mathrm{Nbd}_X(x)$ に対して、ある $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して、$\forall n \geq n_0$ に対して $x_n \in U$ が成り立つ．このとき、$x_n$ は $x$ に収束するといい、$\lim_{n\to\infty} x_n = x$ と表す．

問題19 **[問 17.3]** 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の通常の位相を $\mathcal{O}$ をとし、開半区間の全体を $\mathcal{T}$ とする．すなわち

$$\mathcal{T} = \{(a,+\infty), (-\infty, a)|a \in \mathbb{R}\}$$

$\mathcal{T}$ は $\mathcal{O}$ の準開基であるが、$\mathcal{O}$ の開基でないことを示せ．

問題20 [トポロジーⅠで出された問題．] 距離空間 $X$ の部分集合 $F$ が閉集合であるための必要十分条件は $F$ が点列の極限に関して閉じていること

問題21 **[問 17.4]** $X=\{1,2,3,4\}$, $\mathcal{T}=\{\{1,2\},\{2,3\},4\}$ とする．$\mathcal{T}$ によって生成される集合 $X$ の位相を求めよ．

問題22 **[例 17.4]** $(X,d)$ を距離空間とし、$\mathcal{O}$ を $d$ によって定まる距離位相とする．位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において、

$$\mathfrak{B}(x) = \left\{ N\left(x;\frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$$

は点 $x$ の基本近傍系であることを示せ．

問題23 **[問 17.5]** 第2可算公理を満足する位相空間は、第1可算公理を満足し、可分な位相空間であることを示せ．

問題24 **[演習 6.8]** $\mathbb{R}^n$ が可分であることを示せ．

問題25 **[演習 6.9]** $\ell_1, \ell_2$ が可分であることを示せ．

問題26 **[例 6.19（酒井）]** $\mathbb{R}_S$ は第一可算かつ可分であるが第二可算ではないことを示せ．

問題27 **[Hint 問 17.7]** 可分な空間の部分空間は可分とは限らないことを示せ．

問題28 **[演習 4.1]** 離散空間 $X$ において、点列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が点 $x \in X$ に収束するためには、次の条件が必要十分であることを示せ．

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ s.t. } n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x$$

問題29 $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2=1\}$ に $\mathbb{R}^2$ 上の通常の距離位相の相対位相から決まる位相を入れる．$S^1$ 上の任意の点列 $\{x_n\}$ は収束する部分列を持つことを示せ．

$\boxed{\text{問題 30}}$ **[Hint:例 19.1]** $\mathbb{R}$ 上に通常の距離位相を導入する．このとき、$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ にその積位相を入れる．このとき、$\mathbb{R}^2$ は通常の距離位相が入った位相空間と同じであることを示せ.

$\boxed{\text{問題 31}}$ **[問 19.4]** $\mathbb{R}^n$ の 2 元 $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して、$\mathbb{R}^n$ の元 $x + y$ を

$$x + y = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$$

により定義する．$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を $f(x, y) = x + y$ として定義する．このとき、$f$ は積空間 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ から位相空間 $\mathbb{R}^n$ への連続写像であることを示せ.

大学数学を楽しむためにはその 2（概念の定義に対して何を思うのか？）

「数学におけるイメージの役割」

位相の定義を読んだ後、位相にどんなイメージを抱くだろうか．例えば、位相空間とは空間 $X$ 上のシャボン玉を指定するようなものだと思うとする．距離空間としての $\mathbb{R}$ のシャボン玉とゾルゲンフライ直線 $\mathbb{R}_S$ のシャボン玉は少し違う.（同相ではない.）その違いを感覚として理解できるだろうか？おそらく、大抵の数学者はその違いは明確にイメージしているが、シャボン玉の何かの違いによって認識しているわけではない．どこが違うのか自分の中で説明（もしくは証明）を通して違いを認識しているのである．しかし、最初のシャボン玉のような位相のイメージを捨てているわけでもない.
数学を勉強しているとイメージしにくい概念が増えて行くが出発点となるイメージを見失わなければ次々と理解していくのはたやすいだろう．代数幾何学において、可換環 $A$ における素イデアル $\mathrm{Spec}(A)$ 上のザリスキー位相はもっと普通のイメージがしにくいものである.

Homepage：`http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html`
Twitter：**BasicMathIIB** (`https://twitter.com/BasicMathIIB`)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.