トポロジーI演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第2回（'13年4月22日：Keywords ⋯ 近傍、近傍系、連続、触点、集積点）

[**近傍系**] (neighborhood system, $\mathrm{Nbd}_X(x)$（酒井著）$\mathfrak{N}(x)$（内田著））

「$N \in \mathfrak{N}(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ ある開集合 U が存在して、$x \in U \subset N$ となる.」

このとき、$\mathfrak{N}(x)$ は $x \in X$ の近傍系であるという．$\mathfrak{N}(x)$ の元を x の近傍という.

[**触点**]（closure point, adherent point)、[**集積点**]（極限点、limit point,accumulation point,cluster point)、[**導集合**]（derived set)（教科書（内田著）では集積点のことを adherent と言っているので注意.）

A を X の部分集合とする.

「x が A の**触点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in U$ となる任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して、$U \cap A \neq \emptyset$」

「x が A の**集積点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \in U$ となる任意の $U \in \mathcal{O}$ に対して、$U \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$」

「A の**導集合** $A^d \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ A の集積点全体の集合.」

注意：孤立点は集積点（極限点）と言いません。

[**点列の極限点、集積点**]（limit point of a sequence）

$\{x_n\}$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の点列とする．このとき、

「$x \in X$ が**点列** $\{x_n\}$ **の極限点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x を含む任意の開集合 U に対して、有限個の x_n を除いて、$x_n \in U$ となる.」

このとき、$\{x_n\}$ **は** x **に収束する**という (p.85).

「$x \in X$ が**点列** $\{x_n\}$ **の集積点** $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ x を含む任意の開集合 U に対して、無限個の x_n が $x_n \in U$ となる.」

問題 12 [**問 16.4(1)(3)**] 以下、$\mathbb{R}$ の部分集合に $\mathbb{R}$ の相対位相からくる位相を入れておく.

(1) (a, b) と (c, d) は同相であることを示せ.

(2) (a, b) と $\mathbb{R}$ は同相であることを示せ.

問題 13 離散空間 $(X, \mathcal{O})$ 上の任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ は連続であることを示せ．また、逆に任意の関数 $X \to \mathbb{R}$ が連続なら、$(X, \mathcal{O})$ は離散空間であることを示せ.

問題 14 次の問いに答えよ.

(1) $x \in X$ が A の集積点 $\Rightarrow$ $x \in X$ が A の触点であるが、逆が成り立たない例をあげよ.

(2) 点列 $\{x_n\}$ の集積点が非可算無限個存在する例をあげよ.

問題 15 [**問 16.5**] $f : X \to X'$ を位相空間 $(X, \mathcal{O})$ と $(X', \mathcal{O}')$ の間の写像とし、$X = A \cup B$ とする．このとき、以下を示せ.

$$f : X \to X' \text{が連続} \Leftrightarrow f|_A : A \to X' \text{と } f|_B : B \to X' \text{が両方連続}$$

ここで、$f|_A$, $f|_B$ は f の定義域を A, B に制限したときに得られる写像（制限写像）とする.

問題 16 $\mathbb{R}$ 上の通常の距離位相において、任意の開区間 (a, b) がその開基になることを示せ.

問題 17 [**例 17.4**] ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の通常の距離位相において、任意の $x \in X$ において $\mathcal{B}(x) = \left\{ B_n\left(x; \frac{1}{n}\right) | n \in \mathbb{N} \right\}$ が基本近傍系をなすことを示せ.

問題 18 [**問 17.2 の前半部分**] $\mathbb{R}$ 上の上限位相と下限位相は普通の $\mathbb{R}$ 上の距離位相より大きいことを示せ.

大学数学を楽しむためにはその１（定義の読み方）

「定義は覚えるものではなく親しむもの.」

数学（特に位相空間論）にはさまざまな定義がでてくる．１つ１つの意味を掴むにはじっくりと考えてみること．定義を読んだら、あてはまる例とあてはまらない例をそれぞれ作ってみて何が言いたいのか理解する．例が思い浮かばなければ極端な例を考えて、そこからだんだんと近づいていけばよい。

(例１) 近傍とはどのようなものをいうのだろうか？

(例２) 触点と集積点の違いは何か？

参考文献

数学女子 1-3, 安田まさえ（バンブーコミックス）（数学科女子の心情を生き生きと描写）

Homepage：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html

Twitter：**BasicMathIIB** (https://twitter.com/BasicMathIIB)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です.

教科書にでてくるドイツ文字対応表

$(A,a)\leftrightarrow(\mathfrak{A},\mathfrak{a})$	$(B,b)\leftrightarrow(\mathfrak{B},\mathfrak{b})$	$(C,c)\leftrightarrow(\mathfrak{C},\mathfrak{c})$	$(D,d)\leftrightarrow(\mathfrak{D},\mathfrak{d})$	$(E,e)\leftrightarrow(\mathfrak{E},\mathfrak{e})$	$(F,f)\leftrightarrow(\mathfrak{F},\mathfrak{f})$
$(G,g)\leftrightarrow(\mathfrak{G},\mathfrak{g})$	$(H,h)\leftrightarrow(\mathfrak{H},\mathfrak{h})$	$(I,i)\leftrightarrow(\mathfrak{I},\mathfrak{i})$	$(J,j)\leftrightarrow(\mathfrak{J},\mathfrak{j})$	$(K,k)\leftrightarrow(\mathfrak{K},\mathfrak{k})$	$(L,l)\leftrightarrow(\mathfrak{L},\mathfrak{l})$
$(M,m)\leftrightarrow(\mathfrak{M},\mathfrak{m})$	$(N,n)\leftrightarrow(\mathfrak{N},\mathfrak{n})$	$(O,o)\leftrightarrow(\mathfrak{O},\mathfrak{o})$	$(P,p)\leftrightarrow(\mathfrak{P},\mathfrak{p})$	$(Q,q)\leftrightarrow(\mathfrak{Q},\mathfrak{q})$	$(R,r)\leftrightarrow(\mathfrak{R},\mathfrak{r})$
$(S,s)\leftrightarrow(\mathfrak{S},\mathfrak{s})$	$(T,t)\leftrightarrow(\mathfrak{T},\mathfrak{t})$	$(U,u)\leftrightarrow(\mathfrak{U},\mathfrak{u})$	$(V,v)\leftrightarrow(\mathfrak{V},\mathfrak{v})$	$(W,w)\leftrightarrow(\mathfrak{W},\mathfrak{w})$	$(X,x)\leftrightarrow(\mathfrak{X},\mathfrak{x})$
$(Y,y)\leftrightarrow(\mathfrak{Y},\mathfrak{y})$	$(Z,z)\leftrightarrow(\mathfrak{Z},\mathfrak{z})$				