

# トポロジー I 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第 16 回 ('13 年 7 月 22 日：Keyword … ベールの定理、ゾルゲンフライ直線)

**定義 16** 疎な集合  $X$  を位相空間とする． $X$  の部分集合  $A$  が  $\text{int}(\text{cl}(A)) = \emptyset$  であるとき、 $A$  は位相空間  $X$  の中で疎な集合という．つまり内点を持たない集合のことである．

第一類 疎な集合の可算個の和集合を第一類という．

第二類 第一類でない集合．

ベール集合 可算個の稠密な開集合の共通部分が稠密になるような位相空間．

リンデレーフ 任意の開被覆が可算個の部分被覆をもつことを示せ．

**問題 101** 第一類である部分集合の部分集合は第一類である．よって第二類である部分集合を含む部分集合は第二類である．また第一類である部分集合の可算個の和集合は第一類である．

**問題 102** 第一類である部分集合の可算個の和集合は第一類である．

**問題 103**  $X$  が孤立点を持たない  $T_1$  空間であれば、すべての可算部分集合のは第一類である．

**問題 104** [演習 15.2 (酒井)] 位相空間  $X$  において次が全て同値であることを示せ．

- (1)  $X$  はベール集合．
- (2) 内点を持たない閉集合の可算個の和集合は内点を持たない．
- (3) 第一類である部分集合は内点を持たない．
- (4) 空でない開集合は第二類である．

**問題 105** [演習 15.3 (酒井)] 局所コンパクト距離づけ可能空間は完備距離づけ可能空間である．

**問題 106** [演習 15.1 (酒井)] 完備距離づけ可能な空間の可算積空間は完備距離づけ可能である．

**問題 107** [演習 13.6 (酒井)] 点列コンパクト空間の可算積空間  $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$  は点列コンパクトである．

**問題 108** ゾルゲンフライ直線は局所連結ではないことを示せ．

**問題 109** 距離空間  $\mathbb{R}$  からゾルゲンフライ直線への連続写像は定値写像であることを示せ．

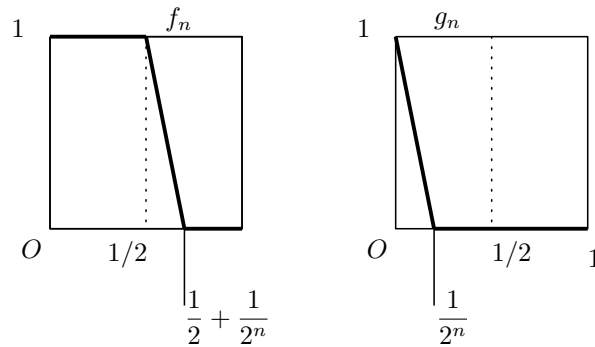
**問題 110** [演習 12.10 (酒井)] 局所コンパクト可分距離づけ可能空間の一点コンパクト化は距離づけ可能であることを示せ．

**問題 111**  $C[0, 1]$  の 2 元  $f, g$  に対して、

$$d_i(f, g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$$

と定義すれば、 $d_i$  は  $C[0, 1]$  上の距離関数になることを示せ．

**問題 112** [問 26.4] 問題 111 の距離関数  $d_i(f, g)$  に対して、 $C[0, 1]$  の元、 $f_n, g_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) を



として定義する．このとき以下の全ての問題に答えよ．

1. 点列  $(f_n | n \in \mathbb{N})$ 、 $(g_n | n \in \mathbb{N})$  はともに基本列であることを示せ．
2. この二つの点列は  $C[0, 1]$  の点に収束するか．

問題 113 距離空間がコンパクトなら、任意の点列は収束部分列を持つ

問題 114 ゾルゲンフライ直線はリンデレーフであることを示せ．

問題 115  $\mathbb{R}^2$  にすべてのひらがなを書くとする．それらを  $\mathbb{R}^2$  上の部分集合として  $H_i (i = 1, \dots, 48)$  とおく． $\{H_i | 1 \leq i \leq 48\}$  に距離位相からくる相対位相を入れるとき、この同相類はいくつあるか？

問題 116 [問 26.1] 距離空間  $(X, d)$  の点列  $(x_n | n \in \mathbb{N})$  について、任意の正数  $\epsilon$  に対してある自然数  $N$  を選んで、 $m \geq N$  かつ  $n \geq N$  ならば、 $d(x_m, x_n) < \epsilon$  となるようにできることと、点列  $(x_n | n \in \mathbb{N})$  が基本列であることは同等であることを確かめよ．

——— 大学数学を楽しむためにはその 15 (多勢力) ———

「数学は紙と鉛筆だけで?」

「数学は紙と鉛筆だけあれば研究できる」などという人があるが、そうではない．人とコミュニケーションを取ることがなにより大事である．たしかにワイルズ教授は屋根裏部屋に数年籠ってフェルマー予想を解決したということだが、ある程度勉強が進んで自分以外詳しい人がいなくなってしまうとそういうことになるかもしれない．ただ、学生が勉強するとき、もしくは数学者も新しい分野のことが知りたいときも、同僚やよく知っている人とコミュニケーションを取ったり、議論しながら勉強する方が一人で専門書を読んだり問題を解いたりするより効率的である．また、自分一人で発見できない視点が得られたりして、よい刺激にもなる．数学は一人で孤立してやるものではなく、基本的に大勢でわいわいやるものである．

Homepage : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html>

Twitter : BasicMathIIB (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です．