

トポロジー I 演習

担当 丹下 基生 : 研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第 13 回 ('13 年 7 月 8 日 : Keywords ... 縮小写像、コンパクト距離空間)

定義 13 有限交叉性をもつ部分集合の収束 位相空間 X の部分集合族 \mathcal{M} が有限交叉性を持つとする . このとき、 \mathcal{M} が $p \in X$ に収束するとは、 p に任意の近傍 U に対して $M \subset U$ となる $M \in \mathcal{M}$ が存在するときをいう .
完備距離空間 距離空間 X の任意の基本列 (コーシー列) が X の点に収束するとき X は完備距離空間という .
縮小写像 距離空間 (X, d) として、写像 $f : X \rightarrow X$ に対してある実数 $0 < c < 1$ が存在して、任意の $x, y \in X$ が $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ を満たすとき f を縮小写像という .
全有界 距離空間 (X, d) に対して、任意の正の数 ϵ に対して、 X の有限個の点を選んで、 $X = N(x_1; \epsilon) \cup N(x_2; \epsilon) \cup \dots \cup N(x_n; \epsilon)$ となるとき (X, d) は全有界という .

問題 89 \mathbb{N} の一点コンパクト化は $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ と同相であることを示せ .

問題 90 位相空間 X において、 $\{p_n\}$ を点列として、 $M_n = \{p_n, p_{n+1}, \dots\}$ とおく . このとき、 M_n は有限交叉性を持ち、 $\{p_n\}$ が $p \in X$ に収束することと、 M_n が p に収束することは同値であることを示せ .

問題 91 有限交叉性をもつ集合の集まり \mathcal{F} に関して極大な集合 \mathcal{M} (フィルターに対する極大フィルターなど) は次を満たすことを示せ .

(1) $\emptyset \notin \mathcal{M}$. (2) $A, B \in \mathcal{M}$ なら $A \cap B \in \mathcal{M}$. (3) $A \in \mathcal{F}$ かつ $A \subset B$ なら $B \in \mathcal{F}$ (4) 任意の $M \in \mathcal{M}$ に対して $A \cap M \neq \emptyset$ なら $A \in \mathcal{M}$.

問題 92 縮小写像は連続写像であることを示せ .

問題 93 [定理 26.1] f を縮小写像とすると $f(x) = x$ となる $x \in X$ がただ一つ存在することを示せ .

問題 94 [定理 27.2] 距離空間 (X, d) に対して次は同値であることを示せ .

- (1) (X, d) がコンパクトである .
- (2) (X, d) は任意の点列は収束する部分列をもつ .
- (3) (X, d) は全有界かつ完備である .

問題 95 [問 27.2+ α] 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して、 n 次元単位球面 S^n はコンパクトであるが、問題 94 の同値条件を用いることで (ℓ^2, d_∞) 上の単位球面はコンパクトでないことを示せ .

— 大学数学を楽しむためにはその 12 (俯瞰力) —

「こつこつウサギもたまには振り向きながら」

基本的な数学概念だけでも数えきれないほど多く存在し、大学 4 年で全てをマスターするのは確かに大変だ . そのためには真面目なウサギになったつもりでひたすら前を向いて進んでいかなければならないが、たまには自分が通った道程を振り向いてみるのもよい . これまで通った道がどういう道だったのか ? またこれからどのように進んでいくのが分かったりする . 例えば曲面や曲線の微分幾何学は曲がった空間上での微積分であり、その接空間は抽象ベクトル空間の一種だ . 行列式を習ったときに出てきた置換群は群論として成長する . また、ベクトル空間や線形写像はホモロジー論と名前を変えて抽象化される . 1 年生で習ったものはほとんどが 3, 4 年でその進化を遂げている . このような分野ごとの系譜を作ってみるのも面白いかもしれない .

Homepage : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html>

Twitter : BasicMathIIB (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください . 携帯からでも OK です .