トポロジーI演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp）

第11回（'13 年 7 月 1 日：Keywords $\cdots$ 連結性、局所連結、位相的性質）

定義 11 **連結** 位相空間 X の U が開集合かつ閉集合なら、$U = X$ または $\emptyset$ であるとき、X は連結であるという.
局所コンパクト X の任意の点においてコンパクトな近傍が存在するとき X は局所コンパクトという.
完全不連結 各点の連結成分が全て 1 点集合であるような位相空間
位相不変量 同相写像で変わらない量のことをいう.
位相的性質 同相写像で変わらない性質のことをいう.
ベルンシュタインの定理 集合 A, B において、$f : A \to B$、$g : B \to A$ なる単射が存在したとすると A と B の間に全単射が存在する.

問題 76 [**問 23.6**]

$$\Phi : 2^\omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1] \qquad \left(\Phi((x_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x_n}{3^n}\right)$$

なる写像 Φ を定義する．$[0,1]$ から $(1/3, 2/3)$ を除いた集合を T_1 とおく．また、T_1 から $(1/9, 2/9) \cup (7/9, 8/9)$ を除いた空間を T_2 とおく．同じように、T_{n-1} から、$(1/3^n, 2/3^n) \cup (7/3^n, 8/3^n) \cup \cdots ((3^n-2)/3^n, (3^n-1)/3^n)$ を除いた空間を T_n とおく．つまり、T_n は T_{n-1} のそれぞれの区間を 3 分割し、その中央の開区間を除いてできる集合である．このとき $T = \cap_{n=1}^{\infty} T_n$ とおくと、T は $\Phi(2^\omega)$ と一致することを示せ.

（2^ω と $[0,1]$ は問題 47 とベルンシュタインの定理を使えば濃度はどちらも連続濃度である.（逆単射は $[0,1]$ の無限小数 2 進展開を用いればよい.）2^ω は完全不連結であるが、$[0,1]$ は連結集合でありその間に同相写像をつくることはできない.）

問題 77 以下の性質は位相的性質であることを示せ.
(1) 連結性
(2) コンパクト.
(3) 第 1 可算公理.
(4) 第 2 可算公理.

問題 78 連結集合の連続像は連結であることを示せ.

問題 79 [**問 25.1**] 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 及び、部分集合 $A \subset X$ において、A が $(X, \mathcal{O})$ の連結集合であることと次が成り立つことが同値であることを示せ.

$$U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subset U \cup V$$

のとき、$U \cap V \cap A \neq \emptyset$ が成り立つ.

問題 80 [**演習 10.4（酒井）**] 位相空間 X における $x \in X$ を含む最大の連結集合を x を含む連結成分といい、$C_X(x)$ と表すことにする．$C_X(x)$ は閉集合であり、$x, y \in X$ に対して、$C_X(x) \neq C_X(y)$ ならば、$C_X(x) \cap C_X(y) = \emptyset$ であることを示せ.

問題 81 [**例 25.1,25.2**] $\mathbb{R}$ が連結集合であることを示せ．また、$\mathbb{Q}$ が完全不連結空間であることを示せ.

問題 82 [**例 25.4**]

$$X = \left\{\left(x, \sin\frac{1}{x}\right) | x > 0\right\} \cup \{(0,y) || y| \leq 1\}$$

とおき、$\mathbb{R}^2$ の距離位相から誘導される位相を入れる．このとき、X は連結だが、局所連結ではなく、弧状連結でもないことを示せ.

大学数学を楽しむためにはその 10（妄想力）

「数学を発展させるには」

数学を発展させるにはどうしたらいいか．手っ取り早いのは未解決問題を解決することであるが、それだけではない．数学の新しい道筋（論理）を作ることも数学の発展につながる．手頃な未解決問題の解決のためには与えられた問題の答えに向かって如何に定理を組み合わせるかということを考えればよい．しかし、解決まで程遠い（ように見える）未解決問題の場合は大抵新しい理論を作ることが必要となる．例えば、クンマーは 19 世紀、フェルマー予想を解決するために円分体の整数環を一意分解整域にまで広げるためにイデアル論を構築した．一方、ハミルトンはポアンカレ予想を解決するためにリッチフローなる微分方程式を提案した．彼ら自身は予想の解決に至らしめなかったがこのような新しい概念は彼らの単なる妄想だけでは終わらなかった．今ではそのような概念がなければ数学自体ありえないほど重要なアイデアにもなっている．数学の世界にそびえる未知なる山やそこに辿りつくためのまだ見ぬ道しるべは、まだ数限りなく存在するはずである．このように、数学の世界の地図を妄想しながら描いていくことこそ数学の醍醐味である．

Homepage：http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html
Twitter：**BasicMathIIB** (https://twitter.com/BasicMathIIB)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です．