

# トポロジー I 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

## 第 10 回 ('13 年 6 月 24 日：Keyword … コンパクト空間、有限交叉性)

**定義 10** コンパクト 位相空間  $X$  の任意の開被覆が有限の部分被覆をもつときをいう。

有限交叉性  $X$  の部分集合族  $\mathcal{A}$  がそのどの有限集合の共通部分が空にならないとき、 $\mathcal{A}$  は有限交叉性をもつという。

フィルター 位相空間  $X$  の部分集合族  $\mathcal{F}$  で以下を満たすものをフィルターという。

(i)  $U \in \mathcal{F}$  が  $U \subset K$  となる場合は、 $K \in \mathcal{F}$

(ii)  $\mathcal{F}$  の有限個の共通部分も  $\mathcal{F}$  の元である。

(iii)  $\emptyset \notin \mathcal{F}$

フィルター  $\mathcal{F}$  を含むフィルターが  $\mathcal{F}$  しかないとき、 $\mathcal{F}$  はウルトラフィルターという。

ルベグ数 距離空間の開被覆を  $\mathfrak{B}$  とする。  $\delta$  をある正の実数とする。直径が  $\delta$  より小さい任意の部分集合はある  $\mathfrak{B}$  の元に含まれるとき、この  $\delta$  をルベグ数という。

**問題 63** [問 21.5] 集合  $X = \{1, 2, 3\}$  の上の位相で、次の条件を満足するものを全て求めよ。

1. 正規かつ正則であるが、 $T_1$  位相でないもの。
2. 正規であるが、正則でなくかつ  $T_1$  位相でないもの。

**問題 64** [定理 21.2] 位相空間  $(X, \mathcal{O})$  について、次の二つの条件は同等であることを示せ。

1.  $(X, \mathcal{O})$  は正規空間
2.  $\mathcal{O}$ -閉集合  $F$  と  $\mathcal{O}$ -開集合  $G$  について、 $F \subset G$  ならば、 $\mathcal{O}$ -開集合  $U$  で  $F \subset U$  かつ  $\bar{U} \subset G$  となるものが常に存在する。

**問題 65** [定理 21.3] 位相空間  $(X, \mathcal{O})$  について、次の二つの条件は同等であることを示せ。

1.  $(X, \mathcal{O})$  は正則空間
2. 各点  $x \in X$  について、点  $x$  の閉近傍の全体が基本近傍系となる。

**問題 66** [問 21.6] 有限正則空間は正規空間であることを示せ。

**問題 67** [問 21.4, 21.7]  $(\mathbb{N}, \mathcal{O})$  を有限補集合位相とする。このとき、 $\mathcal{O}$  はハウスドルフでない  $T_1$  位相であることを示せ。また、数列  $x_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) で、 $x_n \geq n$  を満たす数列とする。このとき、 $x_n$  は  $\mathcal{N}$  の全ての点に収束することを示せ。

**問題 68**  $f(x)$  を任意の多項式、もしくは連続関数とする。  $X$  を距離空間とし、 $p \in X$  となる任意の点とする。このとき、

$$U = \{q \in X \mid f(d(p, q)) < 0\}$$

で定められる集合  $U$  は  $X$  の開集合であることを示せ。

**問題 69** [問 22.2+ $\alpha$ ]  $[0, 1], [0, 1), (0, 1)$  に  $\mathbb{R}$  上の距離空間の相対位相から入る位相を入れる。このとき、これらの空間はお互い位相同型でないことを示せ。

**問題 70** 問題 69 において、 $\mathbb{R}$  上での半開区間位相 (ゾルゲンフライ直線の位相) の相対位相とした場合はどうか？

問題 71  $\mathbb{R}$  はコンパクトでないことを示せ．一方  $\{1/n | n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$  はコンパクトであることを示せ．

問題 72 [p112 系 1] ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ．

問題 73 [p112 系 2] コンパクト空間からハウスドルフ空間への全単射連続写像は同相写像である．

問題 74 [定理 23.2] 次の条件は同等であることを示せ．

- (1) 位相空間  $(X, \mathcal{O})$  はコンパクトである．
- (2)  $(X, \mathcal{O})$  の閉集合の族  $\mathfrak{A}$  が有限交叉性をもてば、常に  $\bigcap \mathfrak{A} \neq \emptyset$  である．

問題 75 [例 22.4]  $(X, d)$  をコンパクト距離空間とする．このとき、ルベグ数として正の実数がとれることを示せ．

——— 大学数学を楽しむためにはその 9 (明白力) ———

「当たり前が当たり前と思えないことから抜け出すには」

数学を勉強していると、「これこれは当然なりたつので...」という文面に出くわすことがある．そのような状況は 2 種類存在する．1 つ目は当然成り立つかどうか分からないとき、2 つ目は本当に当たり前のときである．前者は（もしかしたら数学者が）頑張れば示せるだろうというとき、もしくは厳密にやるとめんどくさいので紙面の都合上割愛するという状況である．このようなとき、読者にしてみればハタ迷惑なことである．しかし本当に乗り越えなければならないのは後者で、本当に当たり前のときである．これは例えば論理的な関係から明らかだったり、状況から定義や定理に当てはまる状況（または定義そのもの）だったりする．そんなとき、ぼーっとしてはたちまち霧の中に入ってしまう．しかし明らかなことが分からなくなるとそれ以来数学は全く入ってこなくなる．なのでこれは大変重要な思考訓練なのである．数学を挫折するのは大抵こんなときである．分かってしまえば、理由自体大したことはないのですぐ頭に入ってくる．こういう体験は数学を勉強して一番成長したと思えるときである．

Homepage : <http://www.math.tsukuba.ac.jp/~tange/jugyo/2013jugyo/topology2013.html>

Twitter : BasicMathIIB (<https://twitter.com/BasicMathIIB>)

もし分からないところがありましたら気軽にメールしてください．携帯からでも OK です．