

トポロジー I 演習

担当 丹下 基生：研究室 (B622) mail(tange@math.tsukuba.ac.jp)

第7回 ('13年6月3日) 小テスト

注意事項

- 試験時間は 16:30 のチャイムが鳴るまでです。
- 持ち込み可 (教科書、ノート、プリント)
- 携帯電話の使用、並びにパソコン、スマートフォンなど外部とのやり取りができる電子機器の使用は認めません。
- (最小限の) 人との相談可ですが、外に出たり、騒いだりしてはいけません。
- 黒板を使うことは不可とします。
- 答えを書くときは自分の頭で理解したことを自分の力で書くこと。
- 他の人の答案を回覧したり、まるごと写すことは不可 (似たような解答があることは認めます。)
- 筆跡が同じ他人の答案があった場合は両方とも 0 点にします。
- 開始 30 分までは退室不可です。
- 試験監督に問題の答えに関わる質問はできません。

これらのことが守れなければその場で答案を回収します。

その他の注意事項

- 数学の答案とは誰が読んでも理解できるような平易な日本語と数式や文字式で書かれた文章のことである。
- 授業で定義されていない概念や、新しく記号を導入する場合は定義を書くこと。

・以下の問題に答えよ．

問題注： $I = [0, 1]$ ．以下断りがなければ位相空間は通常の距離空間からの位相が入っているとす．

問題 1 Λ を任意の集合として、 Λ で添え字づけられる空間の族 X_λ に対して、積集合 $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ 上に通常の積位相を定義せよ．

問題 2 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ として、 $X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ とおき、それぞれ通常の距離空間 \mathbb{R} からの相対位相が入っているとす．
このとき、 \mathbb{N} と X は同相か？証明せよ．

問題 3 カントール集合 $C = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ を考える．この上に距離 d を

$$d((x_n), (y_n)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n - y_n|}{2^n}$$

を定める．ここで、 $x_n \in \{0, 1\}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) である．

- (1) 実際、 d が距離になることを確かめよ．
- (2) この距離 d から誘導される距離空間 (C, \mathcal{O}_d) は離散位相ではないことを示せ．

問題 4 実数 a を $0 < a < 1$ となる無理数とする．このとき、写像 $f: \mathbb{Z} \rightarrow S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ を $f(n) = (\cos 2\pi an, \sin 2\pi an)$ として定める．このとき、 $f(\mathbb{Z})$ は S^1 上で稠密になることを示せ．ただし、 a が無理数とはある整数 p, q を使って、 $a = p/q$ と表せないことである．

問題ヒント：

- 3: 離散位相になるための必要十分条件は任意の 1 点が開集合であることである．
- 4: 背理法により、 $\text{Im}(f)$ に入らない円弧が S^1 上にどれほどあるか考えよ．