

# 結び目 $8_{20}$ の話

山田 裕一\*

2014年3月4日, 26日 講演分

## 概要

$8_{20} = \text{Pr}(-3, 3, 2)$  は, 安部-鄭-大前-竹内 の研究 [AJOT] でも登場している ribbon かつ fibered な knot で, その 0-surgery が別の knot の 0-surgery でも得られる, という特徴があります. この knot の Dehn surgery 等に関するいくつかの事実を, 他の knot の研究の参考になるよう, 集めてみます.

## 1 Monodromy of $8_{20}$

$8_{20}$  の種数は 2 で, Alexander Polynomial は

$$\Delta_{8_{20}}(t) = t^2 - 2t + 3 - 2t^{-1} + t^{-2} = (t - 1 + t^{-1})^2$$

fibered かつ ribbon である.

**事実 1.** fibered knot として, その Monodromy  $\varphi$  は

$$\varphi = D_5 \circ \overline{D}_4 \circ D_3 \circ \overline{D}_2 \circ D_1$$

ここで,  $D_i$  は図 1 の simple closed curve  $c_i$  に沿う right-handed Dehn twist.  $\overline{D}_i$  は left-handed Dehn twist.

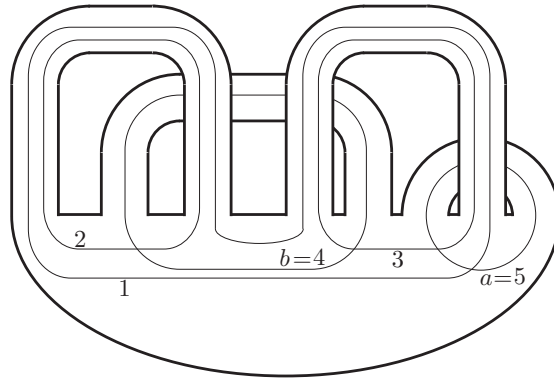


図 1: Simple closed curves  $c_i$  in  $F = \Sigma_{2,1}$

\*The author was supported by KAKENHI (Grant-in-Aid for Scientific Research) No.24540070.

**証明.** (概要)

[Step 1] fiber surface を描き, 余計な Hopf plumbing を外す.

$8_{20}$  の場合: ある Diagram で Seifert アルゴリズムを適用すると, 1 対の positive/negative Hopf bands の plumbing が見える. 以下の変形では plumbing の位置を (proper arc を描き込んで) 覚えておく. 最終的には図 1 の  $a(=c_5)/b(=c_4)$  を core にもつ Hopf plumbing となる.

[Step 2] 2つの Hopf plumbing を外した, より簡単な fiber link の monodromy (Dehn twist の積への分解) を見つける.

$8_{20}$  の場合: すべて成分が unknot の 3 成分 link となる (図 2) PALF と diagram の関係 (right-handed Dehn twist  $\Rightarrow$   $-1$ -framed 2-handle attachment) を使って確かめた.

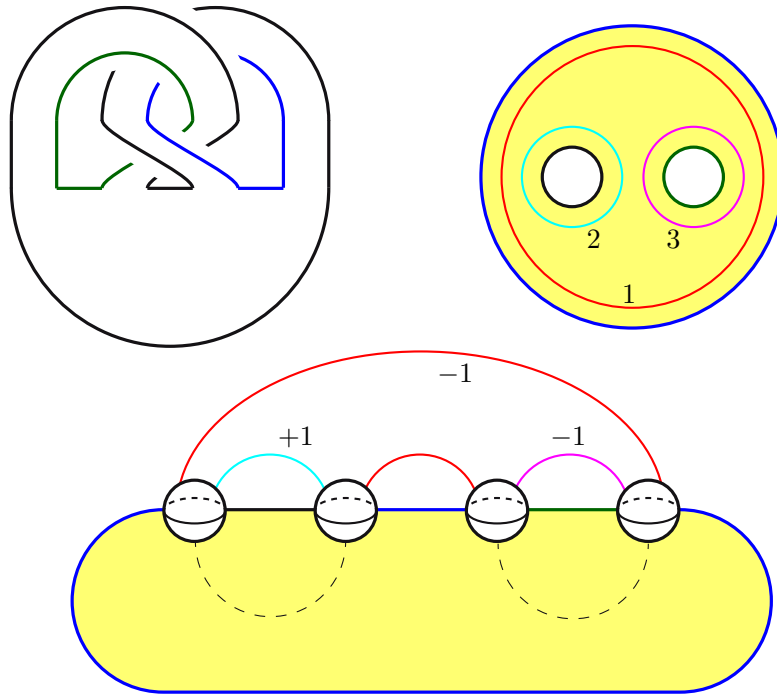


図 2: Simpler fibered link and its monodromy

[Step 3] Step 1, 2 に必要な Surface の変形を, すべて simple closed curve 込で描いて確認する.  $\square$

ここで, 簡単な検算の 1 つとして  $H_1(F; \mathbb{Z})$  への作用の特性多項式が  $\Delta_{8_{20}}(t)$  であることを確かめておく.  $H_1(F; \mathbb{Z})$  の基底を  $\{c_5, c_3, c_4, c_2\}$  (oriented clockwise) とする. 各  $D_i$  がホモロジーに誘導する表現行列  $D_{i*}$  は,  $i = 5, 4, 3, 2, 1$  の順に

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

であり,  $\varphi_* = D_{5*} \circ D_{4*}^{-1} \circ D_{3*} \circ D_{2*}^{-1} \circ D_{1*}$  を求めると

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

この行列の特性多項式は確かに

$$t^4 - 2t^3 + 3t^2 - 2t + 1$$

となる. ちなみに  $D_{5*} \circ D_{4*}^{-1} \circ (D_{3*})^m \circ D_{2*}^{-1} \circ D_{1*}$  に変えると, 行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -(m+1) & 0 & m & -m \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

となるが, 特性多項式は変わらない.

## 2 Dehn surgery along $\delta_{20}$

Knot  $K$  に沿う Dehn surgery を考えるにあたって,  $S^3$  の nontrivial diagram を利用して  $K$  を表示する方法がある. この方法は, 1つの Dehn surgery  $(K; n)$  に対して, その“近く”の Dehn surgery  $(K; n \pm 1)$  などを考察するのに用いる. 以下では  $m_k$  は  $k$  の meridian とする.

**[方法]** framed link  $(L; \mathbf{n}) \cup (k; f)$  で

(1)  $(L; \mathbf{n})$  が  $S^3$  を表し, (2) その  $S^3$  の中では  $(k; f)$  が framed knot  $(K, n)$  を表すようにしておく. このとき, Diagram  $(L; \mathbf{n}) \cup (k; f)$  は  $K$  に沿う Dehn surgery  $(K; n)$  を,  $(L; \mathbf{n}) \cup (k; f) \cup (m_k, \mp 1)$  は  $(K; n \pm 1)$  を, 表していることになる.

与えられた Dehn surgery  $(K; r)$  に対して, その結果の多様体の中で, surgery に用いた solid torus の中心線を (Dehn surgery の) *dual knot*  $K^*$  という. 係数を選べば, dual knot に沿う Dehn surgery で元の多様体に戻ることができる. これを *dual surgery* という

[応用編 (dual の dual)]  $K$  に沿う Dehn surgery  $(K; n)$  で得られる多様体  $M$  が  $M = (L_M; \mathbf{k})$  として表示され, その中で,  $S^3$  に戻る dual surgery が  $L$  の補空間の framed knot  $(k^*; l)$  で表されるとき, 上の [方法] を

$$(L; \mathbf{n}) = (L_M; \mathbf{k}) \cup (k^*; l), \quad (k; f) = (m_{k^*}; 0)$$

に適用することができる. つまり,  $(L; \mathbf{n})$  が  $S^3$  を表し, その中で  $(k; f)$  が与えられた Dehn surgery  $(K, n)$ .

**事実 2.** Knot  $\delta_{20}$  の 0-surgery は 図 3 の 太線の framed link が表すグラフ多様体. 特に, その一方の piece (左半分) は Klein bottle 上の  $I$ -bundle. Dual knot は 図 3 の  $k^*$  (係数は 0) の位置にある.

**証明.**  $\delta_{20} = \text{Pr}(-3, 3, 2)$  は ribbon knot で, symmetric union として the square knot  $3_1 \# -3_1$  から full twist  $\star$  で得られる.

$K$  が torus knot  $T(p, q)$  のとき,  $S^3$  の nontrivial diagram を利用した  $K$  の表示を  $(p, q)$  のユークリッド互除法 から求める方法がある.  $T(2, 3) = 3_1$  の場合, 結果は

$$L = \text{chain link } [-2, -1, -3], \quad k \text{ は } -1 \text{ 成分の meridian}$$

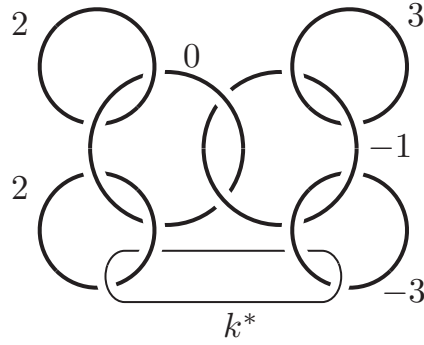


図 3: The 0-surgery along  $8_{20}$  is a graph manifold

となる (係数も調べると  $(3_1; 6+r)$  は  $(L; -3, -1, -2) \cup (k; r)$  と対応) . これと, その mirror image を組み合わせる (図 4) ことで the square knot を構成しておき, ☆の full twist を施す unknot の位置を見つければ良い (肝心の図を省略してすみません) . あとは handle calculus.

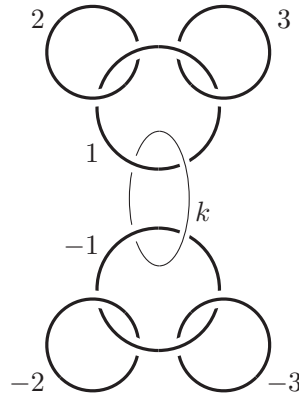


図 4: Nontrivial diagram of  $S^3$  for the square knot

□

**系 1.** Knot  $8_{20}$  の 1-surgery は Seifert manifold. 実は  $-\Sigma(3, 4, 5)$ . Seifert invariants は  $(-1; (3, 1), (4, 1), (5, 2))$ .

**証明.** 方法は上述の [方法] の中で述べた通り.  $(8_{20}; 1)$  は図 3 の  $k^*$  成分を  $-1$ -framing に変えたものに等しい. あとは handle calculus. □

### 3 Relation to gneralized Mazur manifolds

$8_{20}$  の 1-surgery は, なぜか Akbulut-Kirby [AK] で示された (一種の) 例外的 Dehn surgery にも関係がある.  $L_{\text{Mazur}} = K_1 \cup K_2$  を the Mazur link とする. 図 6 の左図で太線の 2 成分が the Mazur link. Akbulut-Kirby [AK] によって図 6 の Calculus (とほぼ同じもの) が示されている. 図の中の 4 角の 4 は 4 full twists を表す.



ここで図 6 に戻る. この calculus で  $\varepsilon = -1/r$  ( $r \in \mathbb{Z}$ ), つまり 「 $\varepsilon = 0$  としてさらに  $r$ -framed meridian を付け加えたもの」を考える. 図 6 から,

$$(L_{\text{Mazur}}; r-1, 0) \cong \text{Pr}(3, -3, 8+2r); 1)$$

が示される. 最後に  $r = -3, -2, -1$  として (c) と比較すればよい. □

ちなみに,  $\text{Pr}(3, -3, 4)$  は  $10_{140}$  であり,

$$\Delta_{\text{Pr}(3, -3, 4)}(t) = \Delta_{\text{Pr}(3, -3, 2)}(t) = \Delta_{3_1 \# -3_1!}(t) = (t^2 - t + 1)^2$$

いずれも (もっと full twists しても) fibered かつ ribbon.

## 4 Exceptional Dehn surgery

$\Sigma(2, 3, 13)$  を生じる knot としては Brittenham-Wu [BW] の Exceptional Dehn surgery along two bridge knots の例もある. ここでは  $C[2, 2] = T(2, 3)$ ,  $C[-2, 2] = 4_1$  となる記号を用いる.

**事実 4.** ([BW] より) 1-surgery along the 2-bridge knot  $C[2n, 2]$  is a Seifert manifold:

$$(C[2n, 2]; 1) \cong (-2; (2, 1), (3, 2), (6n-1, 5n-1))$$

特に  $n = -2$  のとき

$$(C[-4, 2]; 1) \cong (-2; (2, 1), (3, 2), (13, 11)) = \Sigma(2, 3, 13)$$

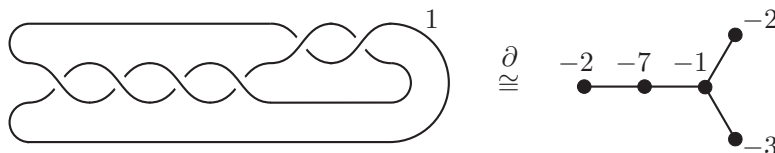


図 7: Two beidge knot  $C[-4, 2]$  and  $\Sigma(2, 3, 13)$

ちなみに, この knot  $C[-4, 2]$  は  $6_1$  で

$$\Delta_{C[-4, 2]}(t) = 2t - 5 + 2t^{-1} \doteq (2t-1)(2t^{-1}-1)$$

fibered ではないが, slice ではある (土屋氏の指摘).

再確認しておく. 異なる Dehn surgery で同じ多様体を作る 例:

$$(C[-4, 2]; 1) \cong -(\text{Pr}(3, -3, 6); 1) = (\text{Pr}(-3, 3, -6); -1) \quad (\cong \Sigma(2, 3, 13))$$

**謝辞.** この講演は, ハンドルセミナー (2013) 後半のほとんどの講演と関わりがあり, かつ自分の研究紹介でもあるので, 深い意義を感じながら話せました. 丹下基生さん, 安部哲哉さん 初めセミナー参加者の皆様に感謝いたします.

## 参考文献

- [AK] S. Akbulut and R. Kirby, *Mazur manifolds*, Michigan Math. J. **26** (1979), no. 3, 259–284.
- [AJOT] T. Abe, I. Jong, Y. Omai and M. Takeuchi, *Annulus twist and diffeomorphic 4-manifolds*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155** (2013), 219–235.
- [BW] *The classification of exceptional Dehn surgeries on 2-bridge knots*, Comm. Anal. Geom. **9** (2001), no. 1, 97–113.