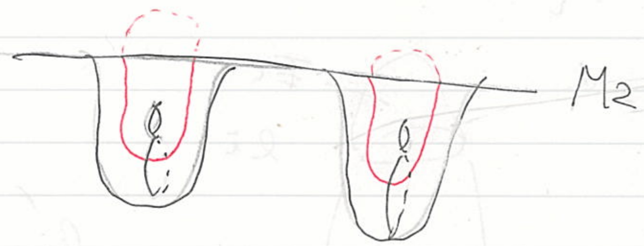
Thm U 5-dim. smooth 1-conn

$$\partial U = M_1 \cup (-M_2)$$

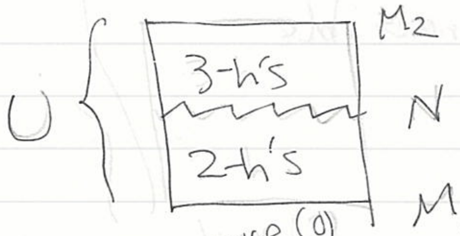
$f : M_1 \to M_2$ homotopy eq (Note M_i : 1-conn)

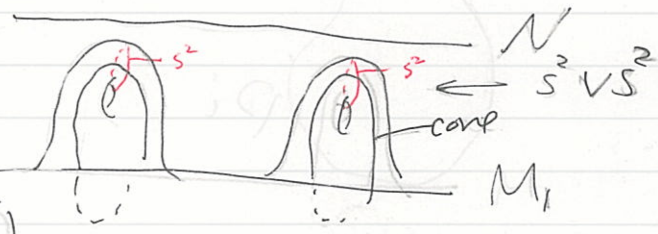
1) $M_1 = M \cup_{\Sigma} W_1$

$M_2 = M \cup_{\Sigma} W_2$



2) $W_1 \cong W_2$





core (0) cocore (0)

$C_1 : \cup \underbrace{S^2_{i1}} \vee S^2_{i2} \longrightarrow N$

$C_2 : \cup S^2_{i1} \vee \underbrace{S^2_{i2}} \longrightarrow N$

cocore (0) core (0)

$S = \cup \{ S_i : C_1(S^2_{i1}) \subset N \}$
(0)

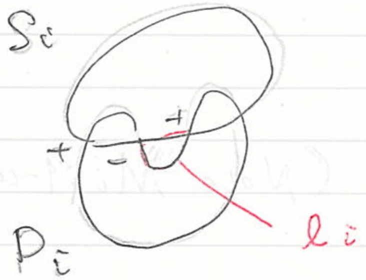
$P = \cup \{ P_i : C_2(S^2_{i2}) \subset N \}$
(0)

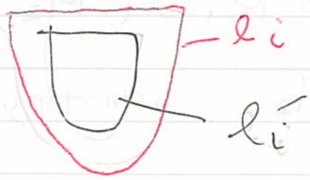
$M_1 \# S^2_{11} \times S^2_{12} \# S^2_{21} \times S^2_{22} \# \cdots \# S^2_{n1} \times S^2_{n2} = N$

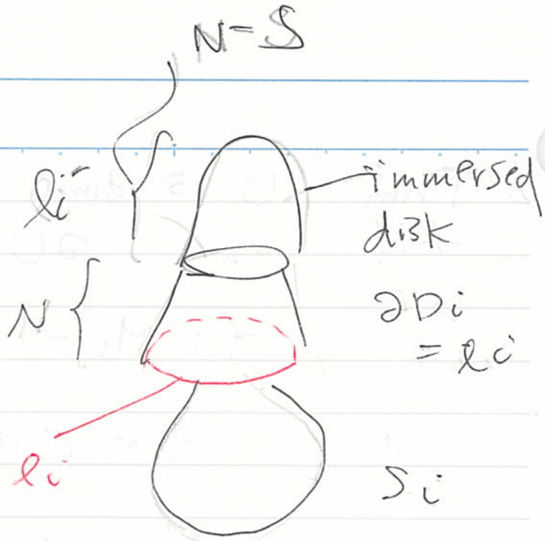
$M_2 \# S^2_{11} \times S^2_{12} \#$ 〃 $\cong N$

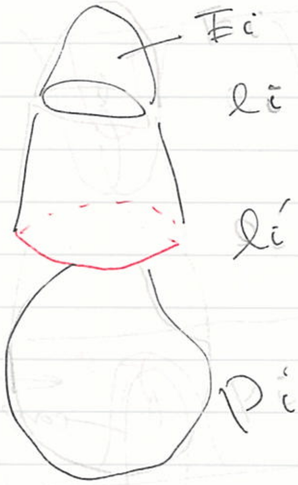
$\langle [S_i], [P_i] \rangle = 1$

$V_0 = \mathrm{Nbd}(S \cup P)$



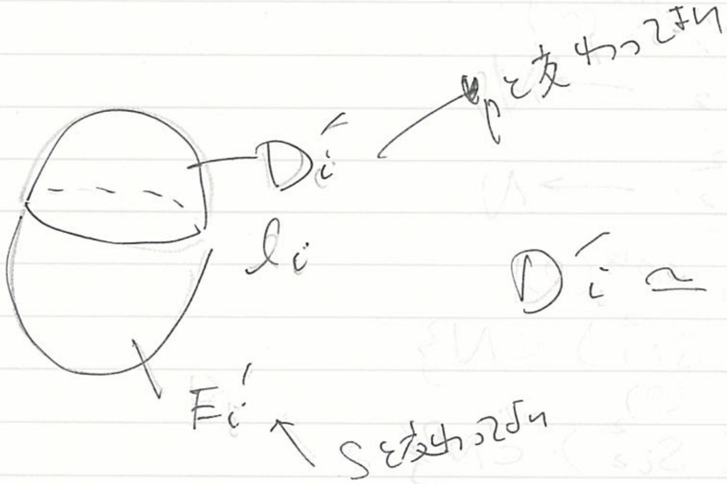






l_i' は $N \setminus P$ の中で contractible

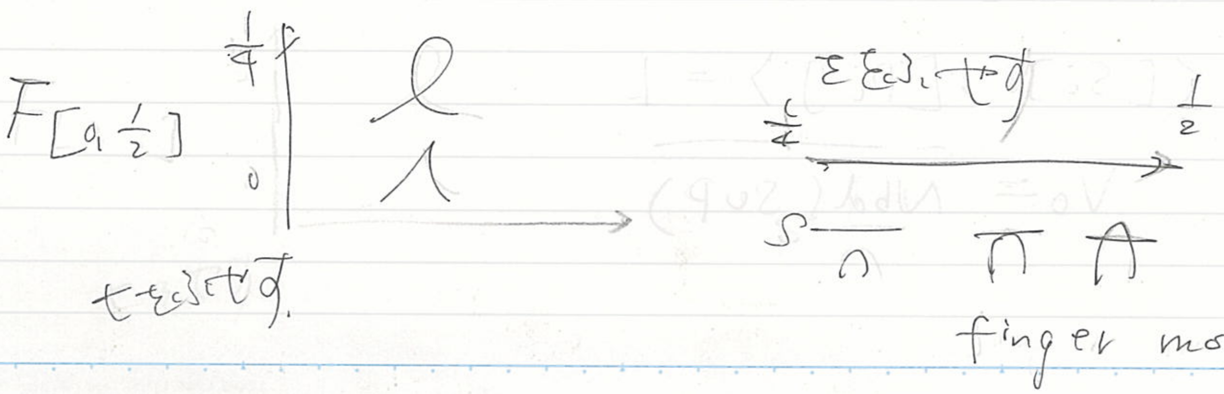
l_i' は $N \setminus S$ の中で contractible



$D_i' \simeq E_i'$ (homotopic) としてよい。

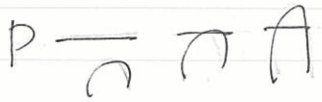
D_i' と E_i' のホモトピーを F とおく。

Lemma 9 このホモトピーは



$\frac{3}{4} \longleftarrow \frac{1}{2}$

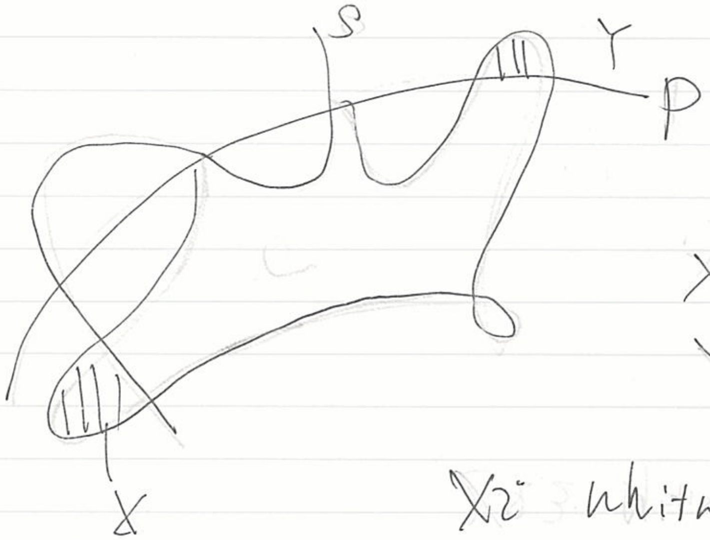
$F_{[1/2,1]}$



$\frac{3}{4}$ ↓ 1.

$F_{\frac{1}{2}} : B_i^2 \longrightarrow K_i$

$F_{\frac{1}{2}}(\cup B_i^2) = K = \cup K_i$



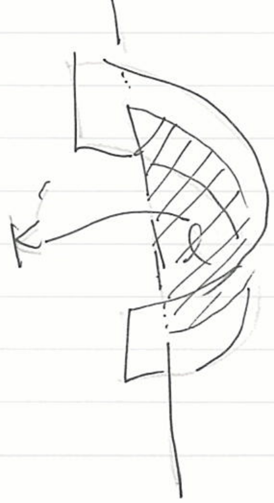
X : S とKの whitney disk

Y : P とKの whitney disk

Xで whitney trick をしたあとをK'とおくと、

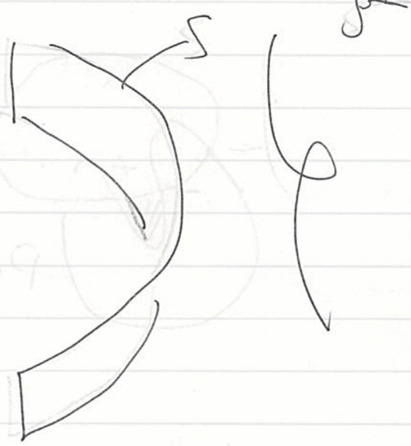
$S \cap \mathrm{Int}(K) = \phi$

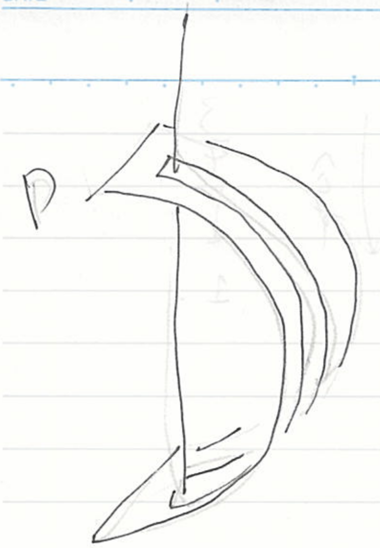
$K' = F_{1/4}(\cup B_i^2)$

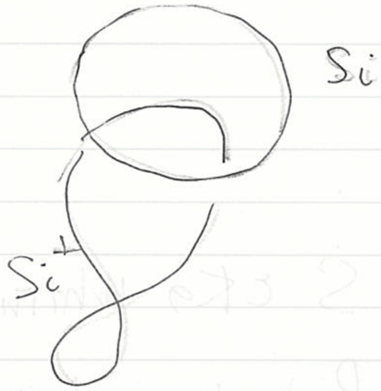


$\xrightarrow{\text{immersed}}$

whitney disk



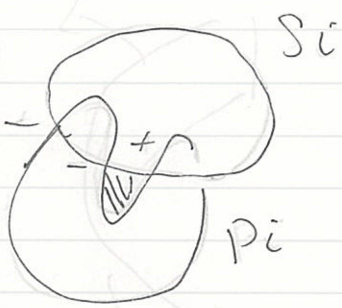


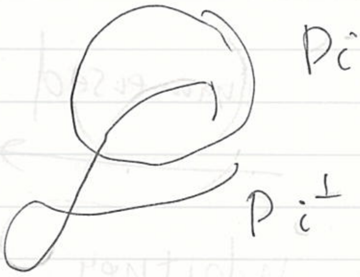


Yで whitney trick をして

その後の disk を K'' とおくと.

$$P \cap \mathrm{Int}(K'') = \phi$$





$V_1 = V_0 \cup \mathrm{Nbd}(K \cup X \cup Y)$

とする。

N の V_1 から生成する handle 分解

を考える。

$N = V_1 \cup (1\text{-}h) \cup (2h) \cup (3h) \cup (4h)$

V_1 は次の3つの性質をもつ。

(1) $H_2(V_1)$ は、$\{S\}$ と $\{P\}$ で生成される。

(2) 各 $\{S_i\}$ に対して $\{S_i^+\}$ がある。

各 $\{P_i\}$ に対して.

(3) $\pi_1(V_1)$ は free group

$V_2 = V_1 \cup \{1\text{-}h\text{'s}\}$

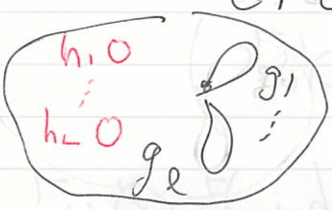
とすると、

V_2 は (1), (2) (3) の性質をみたす。

$\pi_1(V_2)$ の生成元を $g_1 \cdots g_l$ とする。

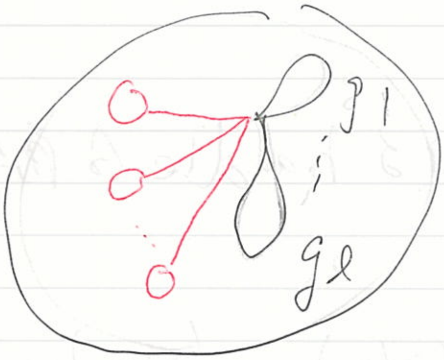
V_2 に attach する 2-handles の attaching

circle を $h_1 \cdots h_l$ とする。



V_2

$h_1 \cdots h_l$ それぞれ base pt とつなげて.



V_2

$h_1 \cdots h_l$ を $\pi(\partial V_2)$ の元と思う。

$$\pi_1(\partial V_2) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(V_2)$$

について. φ は全射

$\langle h_1 \cdots h_l \rangle$ を $\{h_1 \cdots h_l\}$ で生成される ∂V_2 の正規閉包とする.

$$\varphi(\langle h_1 \cdots h_l \rangle) = \langle \varphi(h_1) \cdots \varphi(h_l) \rangle$$

$$\{\varphi(h_1) \cdots \varphi(h_l)\}$$

$$\pi_1(V_2) / \langle \varphi(h_1) \cdots \varphi(h_l) \rangle = 1$$

$$\therefore \pi_1(V_2) = \langle \varphi(h_1) \cdots \varphi(h_l) \rangle$$

よって φ は全射になる.

$g_i \in \pi_1(V_2)$ について.

$$g_i = (\alpha_{i_1} \varphi(h_{i_1})^{\pm 1} \alpha_{i_1}^{-1}) \cdots\cdots (\alpha_{i_n} \varphi(h_{i_n})^{\pm} \alpha_{i_n}^{-1})$$

とかける

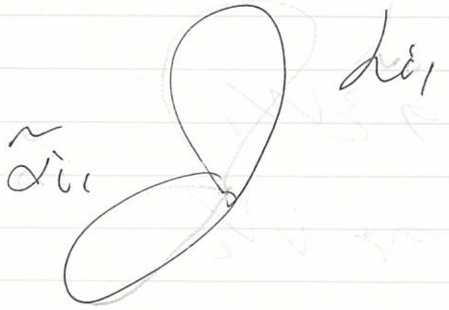
ψが全射より　$\psi^{-1}(\tilde{\alpha}_{i_k}) = \alpha_{i_k}$ となる.

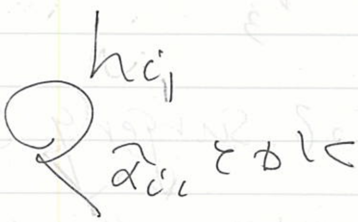
$\tilde{\alpha}_{i_k} \in \pi_1(\partial V_2)$ がある.

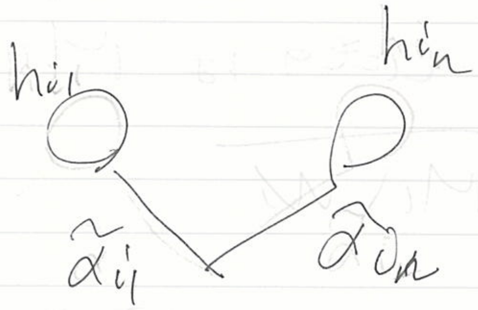
$$\tilde{g}_i = (\tilde{\alpha}_{i_1} h_{i_1}^{\pm 1} \tilde{\alpha}_{i_1}^{-1}) \cdots (\tilde{\alpha}_{i_n} h_{i_n}^{\pm 1} \tilde{\alpha}_{i_n}^{-1})$$ とおく.

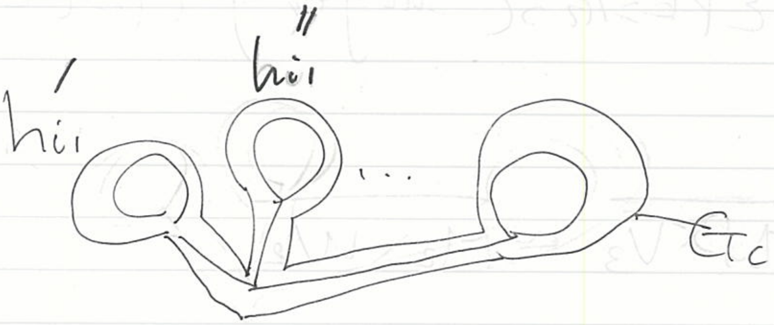
$$\Big\downarrow \psi$$

$$g_i$$



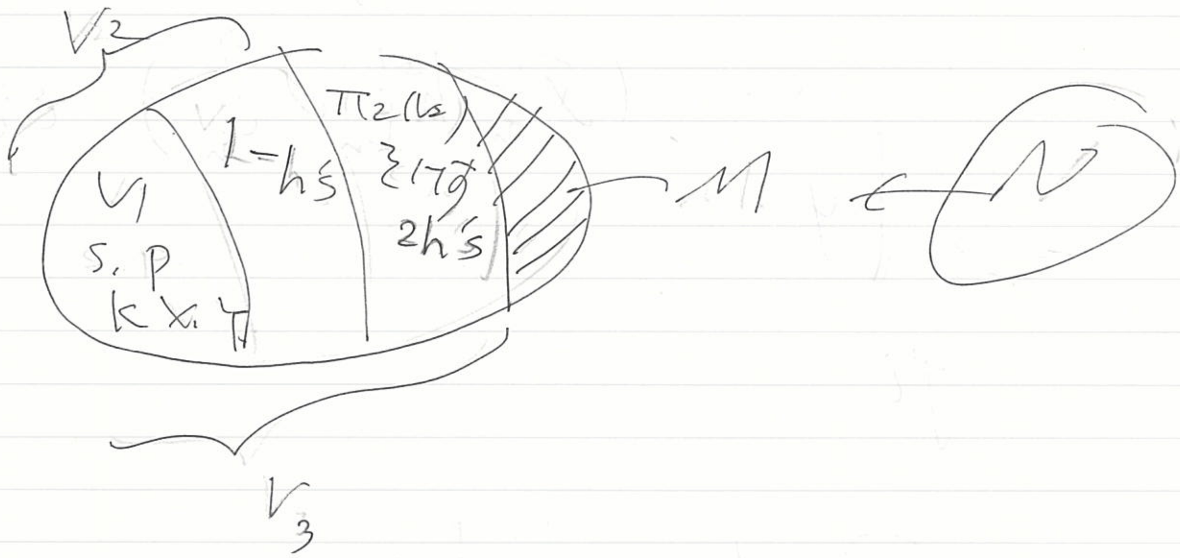






$g_i \simeq \tilde{g}_i \simeq G_i$

各 G_i に2-hをくっつけた
ものを V_3 とする



V_3を Sに沿って surgery したものを W_1

V_3を P_2に沿って 〃 したものを W_2

NをSに沿って surgery したものは M_1より

$M \overset{def}{=} \overline{N \setminus V_3} \cong \overline{M_1 \setminus W_1}$

同様に. NとPに沿って surgery したものは

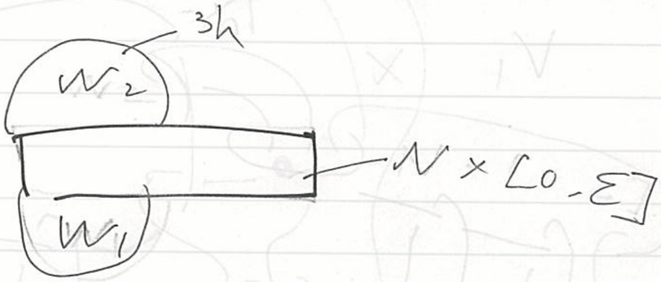
M_2より

$M = \overline{N \setminus V_3} \cong \overline{M_2 \setminus W_2}$

よって.

$M_1 = M \cup_\Sigma W_1$

$M_2 = M \cup_\Sigma W_2$



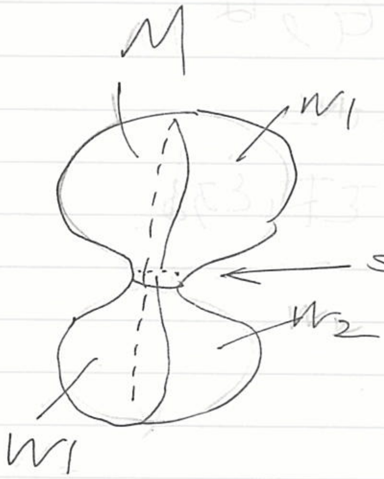
Fact

$$\boxed{W_1 \cup_\Sigma (-W_1) = S^4 \qquad W_1 \cup (-W_2) = S^4}$$

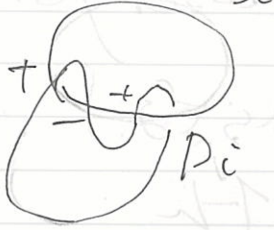
こうにとすると、

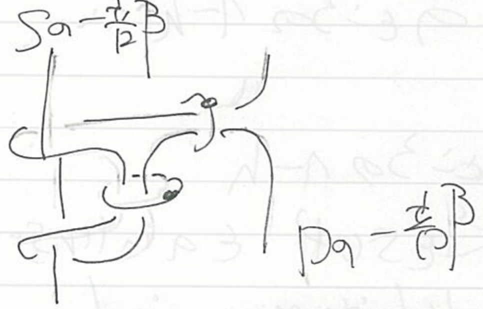
$$M_1 \cong M \cup_\Sigma W_1 = M \cup W_1 \# \underbrace{W_1 \cup_\Sigma W_2}_{w}$$

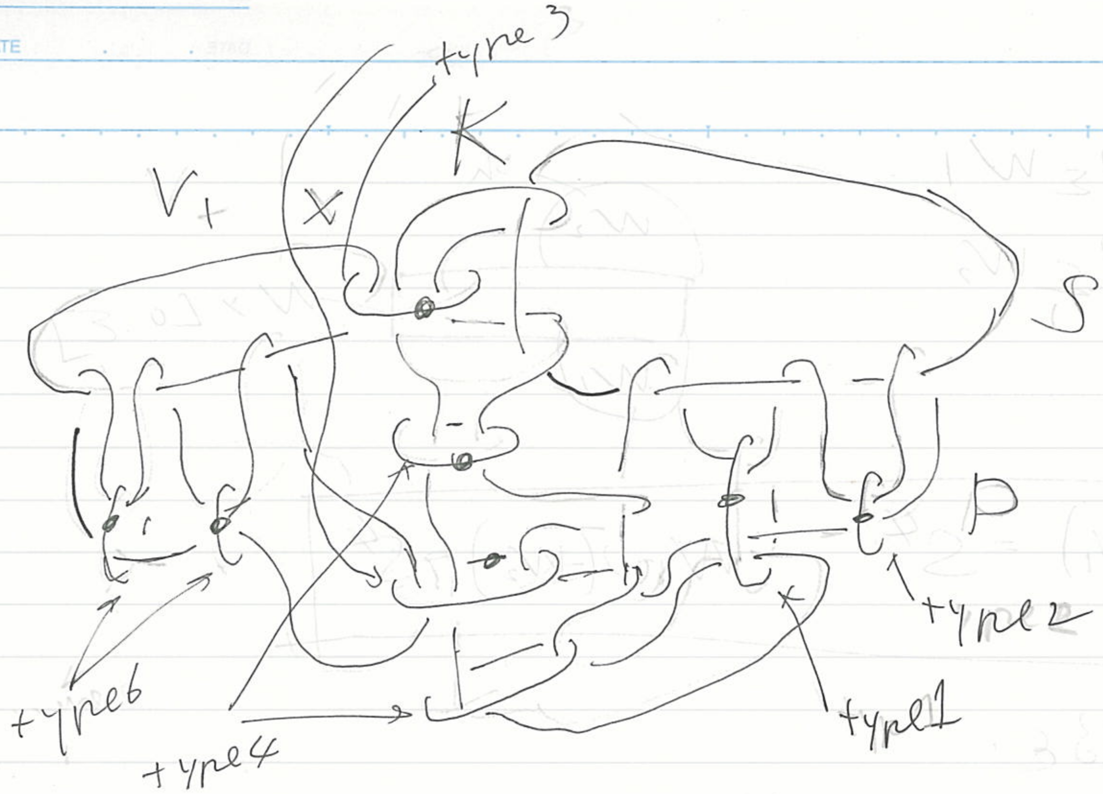
$$= \underbrace{M \cup W_1}_{M} \cup_{\Sigma \# \Sigma} \underbrace{W_1 \cup W_2}_{w}$$



$V_0' = \mathrm{Nbd}(S \cup D \cup \{$"+1"の交点どうしをつなげたarc$\})$



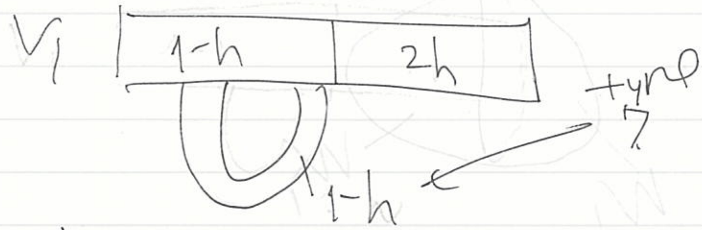




$\pi_1(V_2)$ の生成元 $g_1 \cdots g_\ell$ を消す 2-h の attaching circle $G_1 \cdots G_\ell$ は、

$g_i \simeq G_i$　このホモトピーを F_i とする。

$V_2 = V_1 \cup (1\text{-h's})$



V_2 の 1-h をかき出してみる。

1 S と P との intersection からくる whitney circle のところの 1-h

2 〃 accessory circle のところの 1-h

3 K と $S \cup P$ との intersection からくる whitney circle のところの 1-h

4 KとSUPとの intersection からくる Accessory circle のところの 1-h

5. Kの self-intersection からくる whitney circle のところの 1-h

6 X とYの intersection からくる whitney circle とAccessory circleのところの 1-handle

7. Extra 1-h

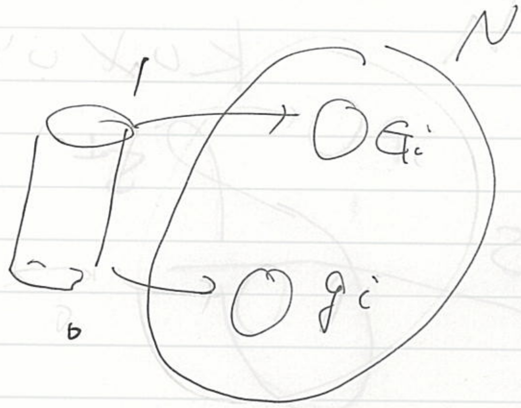
type 1, 3. $\pi_1(V_2)$の生成元に関係しない。

$\pi_1(V_2)$の生成元に関係するのは 2,4,6,

$F_i : S^1 \times I \longrightarrow N$

$F_i : (\cdot, 0) = g_i$

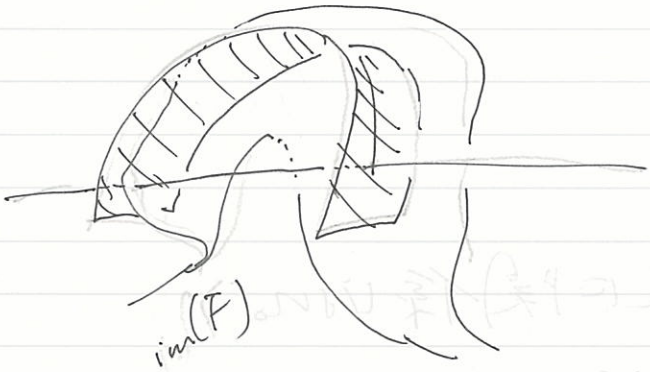
$F_i : (\cdot, 1) = G_i$



ホモトピーがXやYと交わったら.

ホモトピーが x や y と交わったら

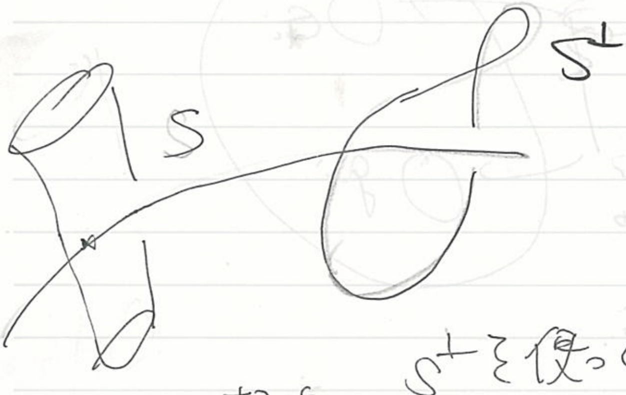
F_1の像を K の S の boundary に向かって移動して K との交わりにできる。



F_1の像と K との交わりは、

P との交わりに変えることができる。

$K \cup x \cup y$ とは disjoint にできる。

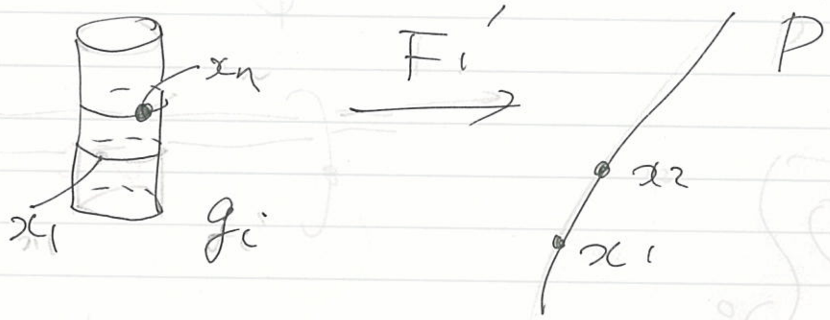


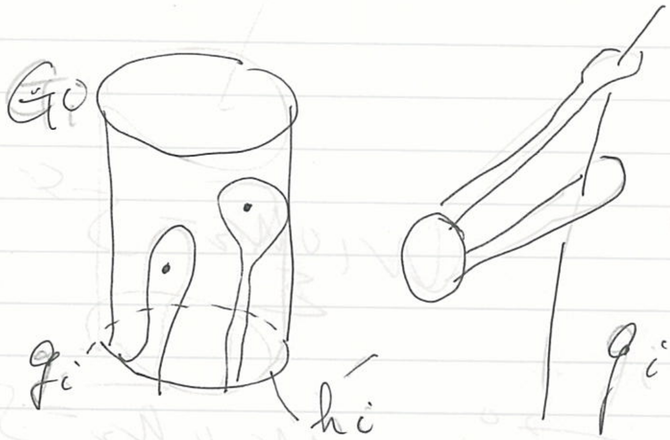
まわるとおると。 $S^\perp$を使ってF_1の像が S と disjoint にできる。

F_i の im は $S \cup K \cup X \cup Y$ と disjoint となる

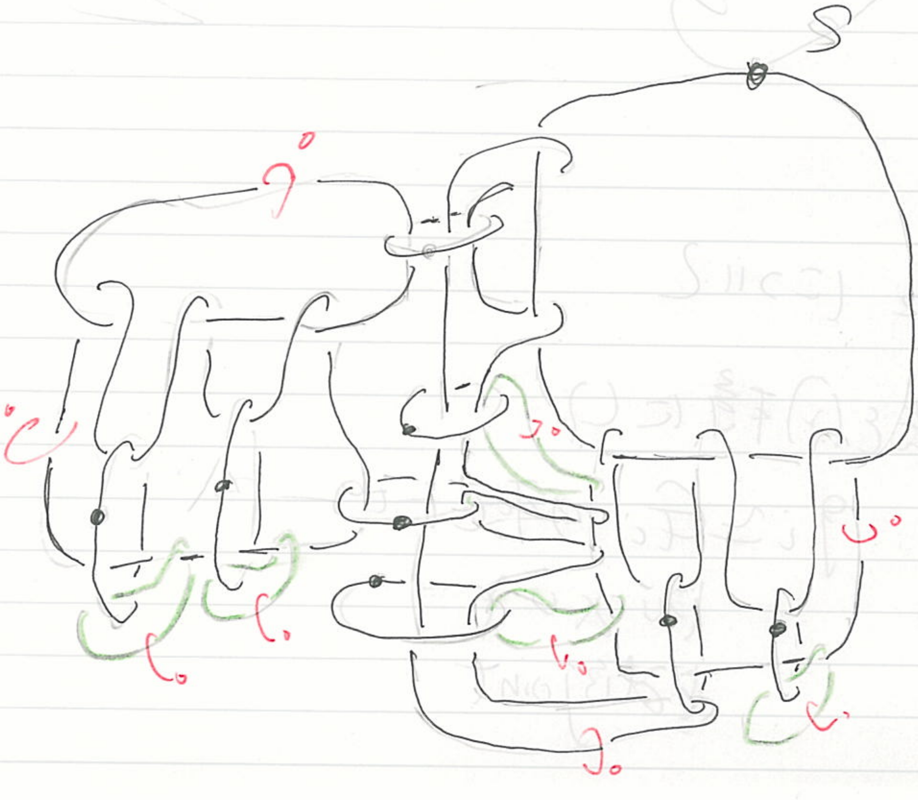
このホモトピーを F_i' とする

$\{x_1 \cdots x_n\}$ を F_1' とする



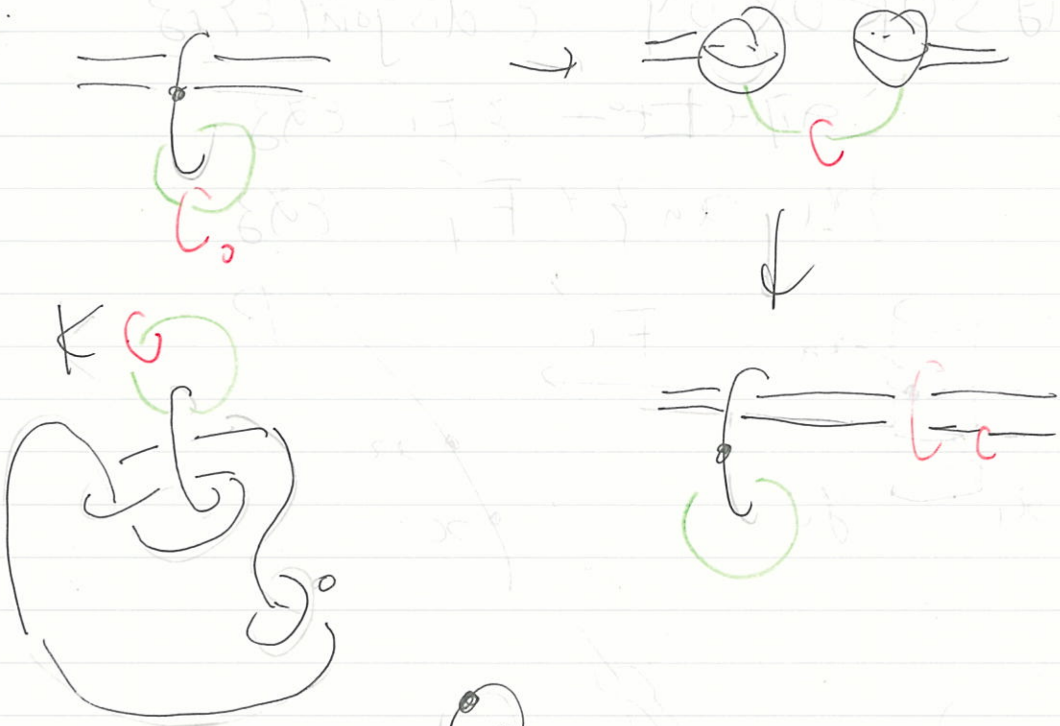


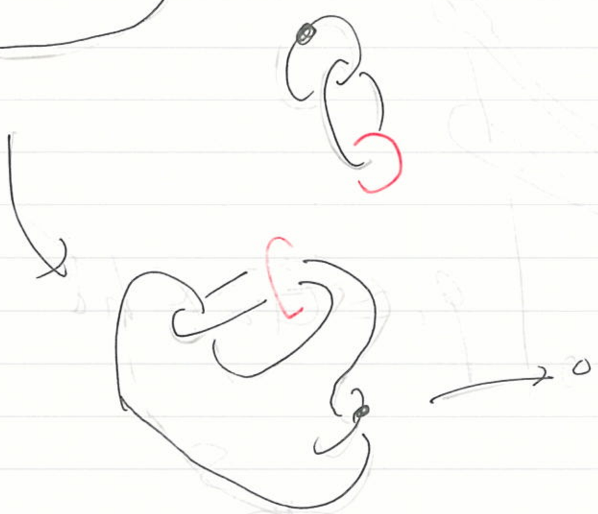
$g_i \simeq G_i \simeq h_i$



NO.

DATE





$W_1 \cup_\Sigma \overline{W_2} = S^4$

$W_1 \cup_\Sigma \overline{a_2} = S^4$

$W_1 \cup_\Sigma W_2$ について

先と同様により

$g_i \simeq G_i$ のホモトピーが

$D \cup X \cup Y$

とdisjoint