Handle friendship seminar 2013/5/15

No. 1

log 変換 : $X^4 \supset T^2 \quad (T^2)^2 = 0$ $\qquad \nu(T^2) = T^2 \times D^2$

$[X^4 - \nu(T^2)] \cup T^2 \times D^2$

$\varphi : T^2 \times \partial D^2 \to \partial \nu(T^2)$

$A \in SL(3, \mathbb{Z})$

$\varphi(\partial D) = p[\partial D^2] + q[\lambda]$ $\qquad \lambda \subset T^2$: s.c.c.

$X(T^2, p, q, \lambda)$

{ 3.4-handle のつけ方は一意なので これできまる $\varphi(\partial D)$ さえきまればよい! }

{ $p \geq 2$ の方が面白いが $p = 1$ でないと symplectic に伸びない }

X^4 : Symplectic

$\cup$

T^2 : Lagrangian torus

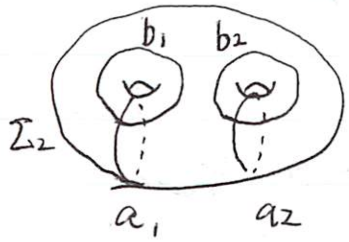
$X(T, 1, q, \lambda)$: Luttinger surgery

Symplectic

{ $\mathbb{C}P^2 \#^3 \overline{\mathbb{C}P^2}$ の exotic mfd をつくりたい. }

$E_0 := \Sigma_2 \times T_0^2 \supset \Sigma_2$ $\qquad$ 但し T_0^2 : 

, Σ_2 : genus 2 の曲面



$q = -1$

{ Luttinger surgery を4回やってる }

$E_0(a_1 \times C, a_1)(b_1 \times C, b_1)(a_2 \times C, c)(a_2 \times D, D) = \tilde{E}_0$

$K \subset S^3$: trefoil $\qquad \cup$

$(S_0^3(K) \times S^1) \#^2 \overline{\mathbb{C}P^2}$ $\qquad \Sigma_2'$

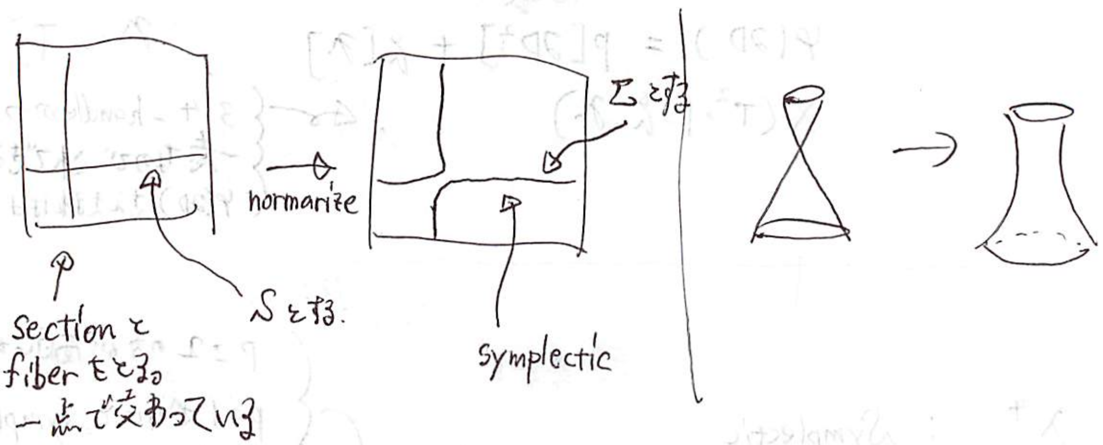
Dehn surg. $\qquad$ 0-surgery

参考 Akbulut の論文

(つづき)

$$\hat{F} \to S_0^3(K) \times S^1 \to S^3 \times S^1$$

F : Seifert surface of K



self intersection number

$(\hat{F}+S)^2 = 2$ $\left(\because (\hat{F}+S)^2 = [\hat{F}]^2 + 2\hat{F}\cdot S + [S]^2 = 2\hat{F}\cdot S = 2 \right)$

$(S_0^3(K) \times S^1) \#^2 \overline{\mathbb{C}P^2} \supset \Sigma'$, $[\Sigma']^2 = 0$

Σ' : symplectic

$E_0 = \Sigma_2 \times T_0^2 \supset \Sigma_2$

$(a_1 \times C) \cap \Sigma_2$ ~~xxx~~ $\times pt. = \emptyset$ $\quad pt \notin C$

Symplectic fib. sum.

$$\tilde{E}_0 \underset{\Sigma_2' = \Sigma'}{\#} \tilde{E}_2 = M$$

M : $\mathbb{C}P^2 \#^3 \overline{\mathbb{C}P^2}$: homeo

M : minimal ($\because$ Usher の定理より)

$\pi_1 = e$

Euler数　　　　signature

$e(E_0)=0$,　　$\sigma(\tilde{E}_0)=0$

$e(\tilde{E}_2)=2$　　　$\sigma(\tilde{E}_2)=-2$

{2回blow-upしてるので

$e(X \#_{F=F'} X') = e(X) + e(X') + 4\cdot(g-1)$

$\sigma(X \#_{F=F'} X') = \sigma(X) + \sigma(X')$

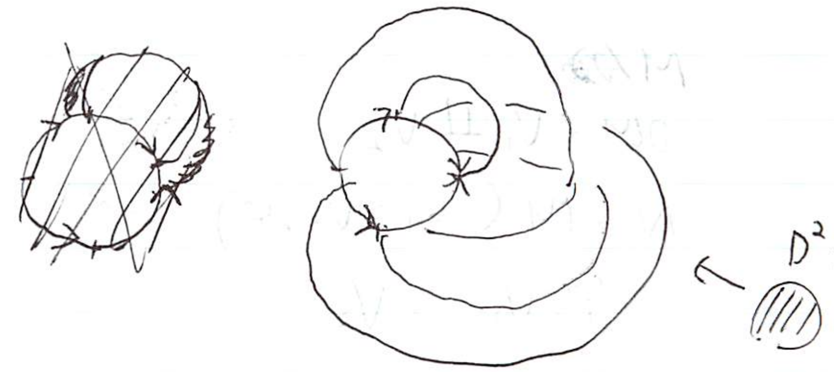
$e(M)=6$　,　$\sigma(M)=-2$

$\mathbb{C}P^2 \# 3\overline{\mathbb{C}P^2}$

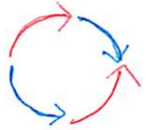
{ Akbulut の本が参考になる }

T^4 のハンドル分解：

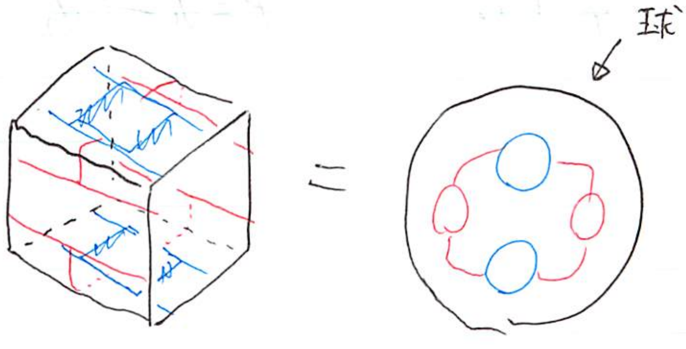
T^2 :



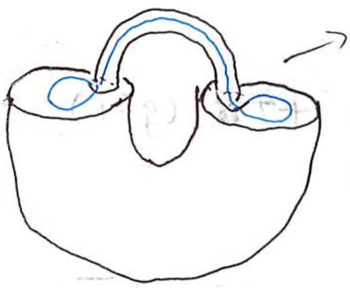
T^2 :

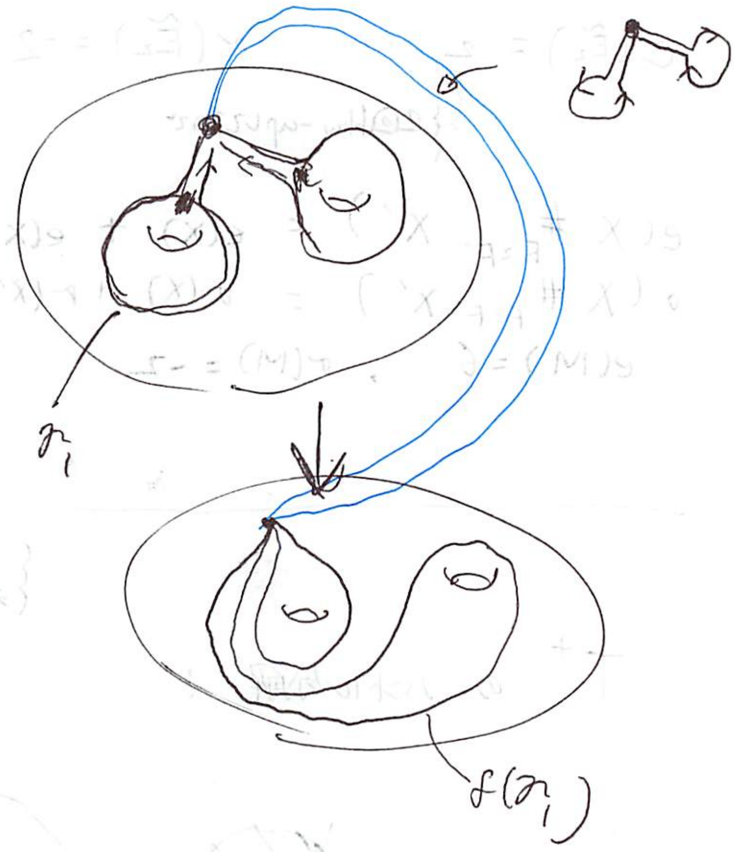


$T^2\times I$:



$T^2 \times I \to T^2 \times S^1$





{ 対応する π_1 の 生成元 を 上でつなげる. 連結和をする }

M

$\partial M = V_1 \amalg V_2$

$N = M(V_1 = V_2, \varphi)$

$\varphi : V_1 \to V_2$

M_1, M_2 , $\partial M_i = V_i$

$N = M_1 \cup_\varphi M_2$, $\varphi = V_1 \to V_2$

2013/5/15

No. 3

$M_1 \;\vdots\; M_2 \longrightarrow M_1 \quad M_2$

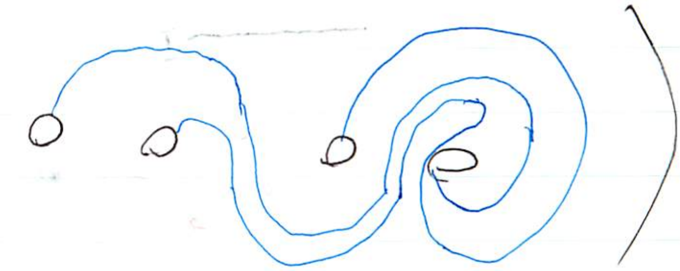
図式

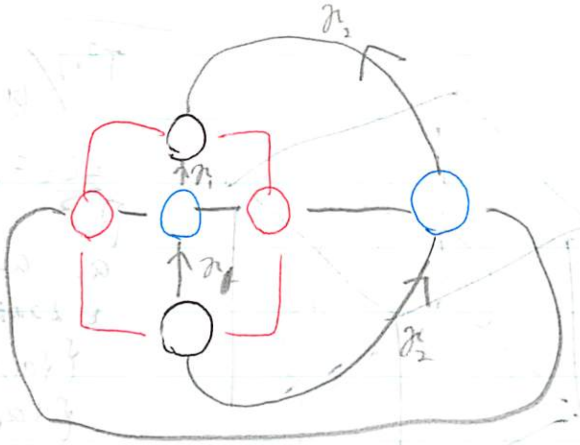
M_1とM_2の図式を並べて描く.

例

M_1 : ○ ○ $\Longrightarrow$

M_2 : ○ ○





∪ 3h

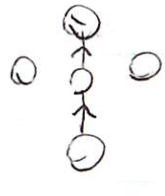
; T^3

torus の diffeo を $T^2 \times I$ で考える。

ひっくり返すようにくっつける

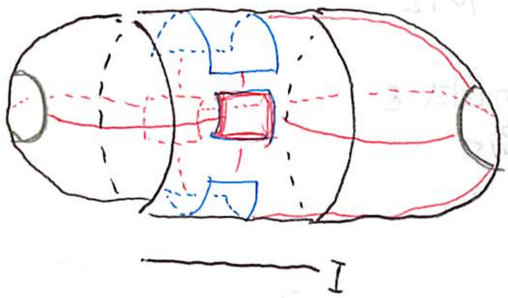
openbook みたいに

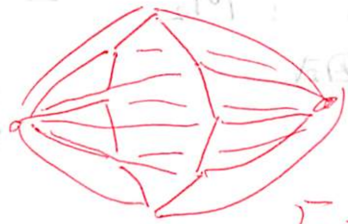
動かしてひっくり返すと

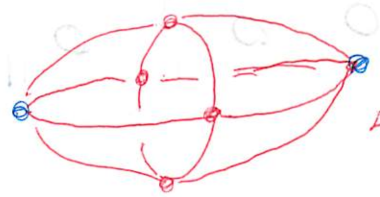


が

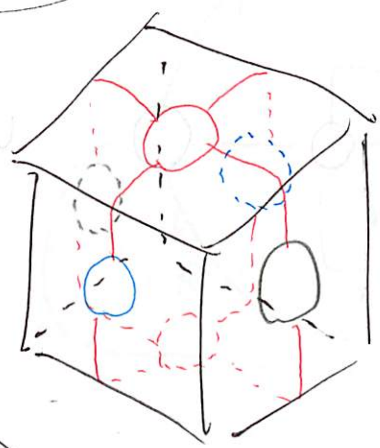
にいく。





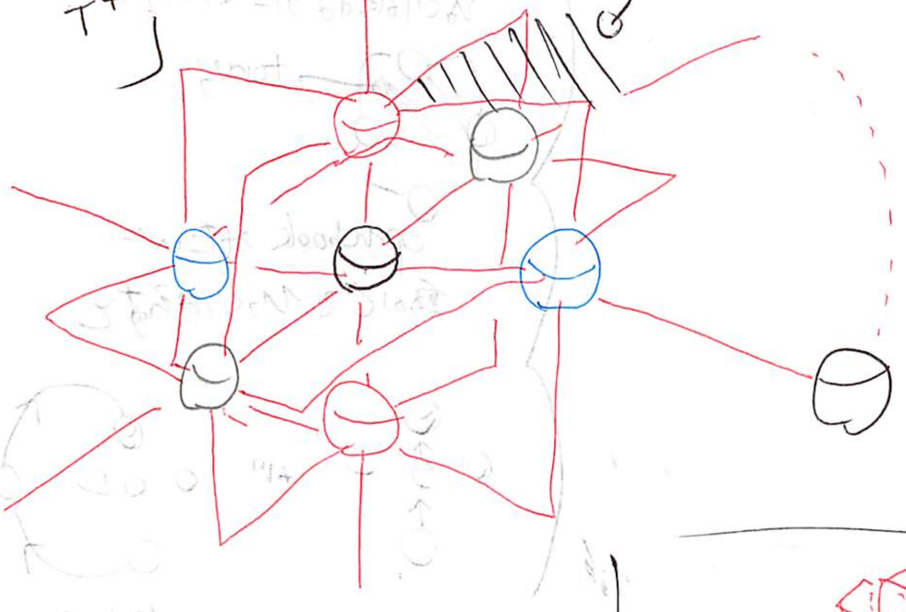


$T^3 = I^3/\sim$



ほんとはここに
3-handle がついてる

T^4



$T^3 \times I \big/ _{(x,0)\sim(\varphi(x),1)}$

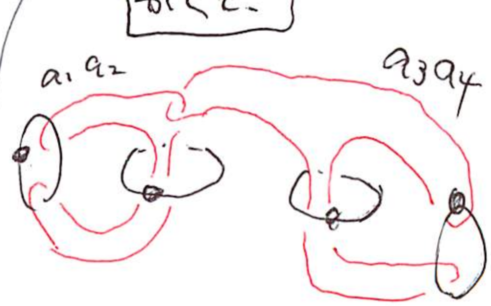
$\dfrac{{}_4C_2}{2} = \dfrac{6}{2} = 3$

a_1, a_2, a_3, a_4
を2つの組に2つずつ分ける。

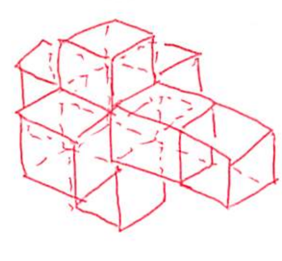
$\{\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}\}$
$\{\{a_1, a_3\}, \{a_2, a_4\}\}$
$\{\underbrace{\{a_1, a_4\}}_{\text{torusが1コ}}, \{a_2, a_3\}\}$

torusの補空間

これを
dotted
circle
の図で
かくと。



S^3

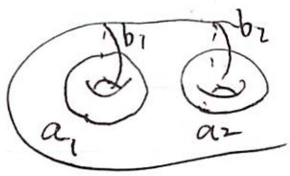


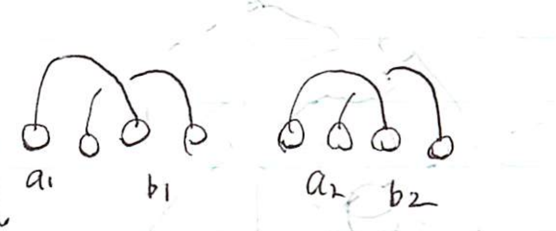
hopf link

3コの点

2013/5/15

No. 4





homologyの生成元

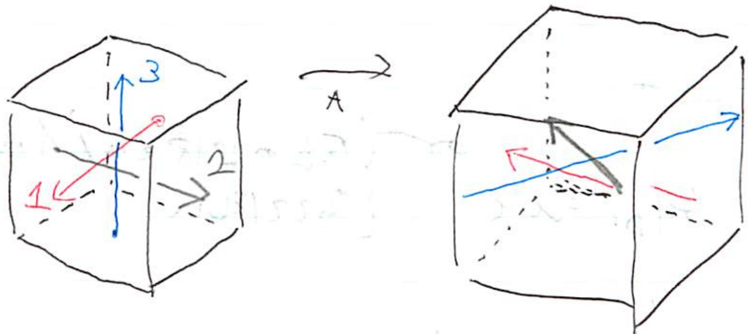
T^3 の mapping torus : $T^3\times I \big/ (x,1)\sim(\varphi(x),0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

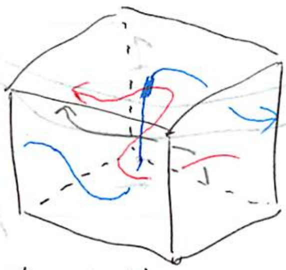
$T^3 \xrightarrow{A} T^3$

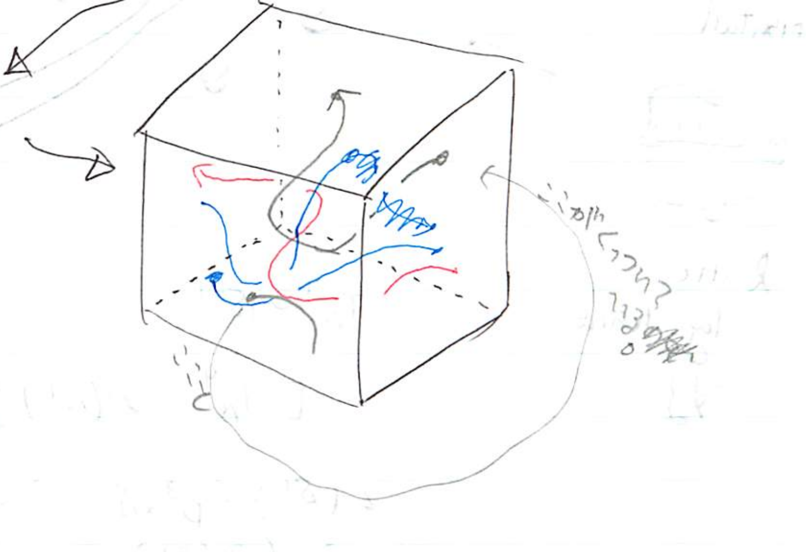
$|A| = 1$

$|A - I| = \pm 1$

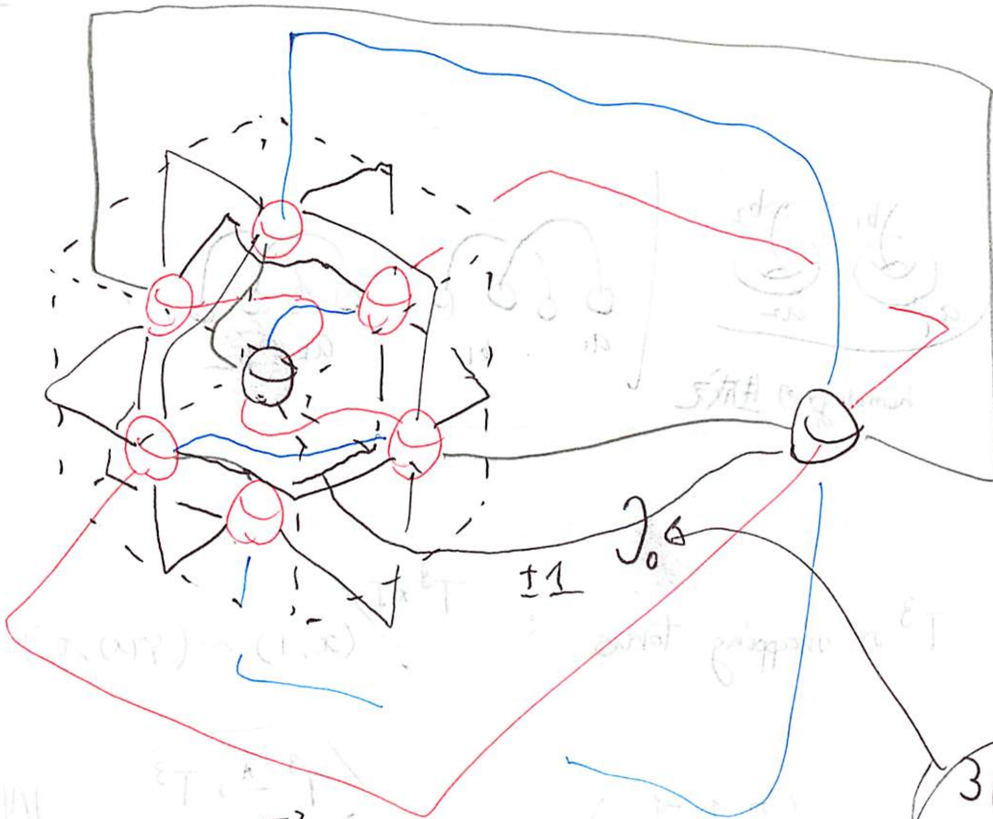


No.3 ウラの 赤色の線をどこにもっていくか。
外の線はそのまま。中がかわる。





中心で直交するように直した。

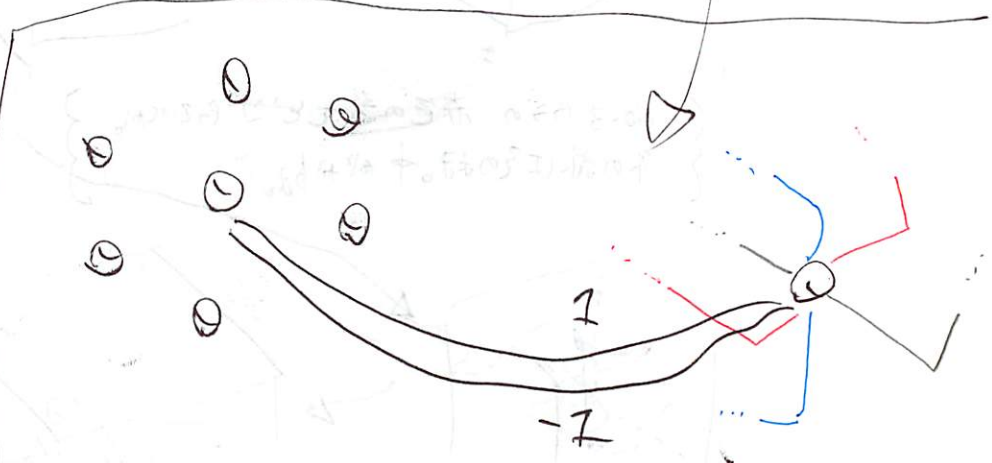


3hとキャンセルする

$T^3\times I/(Ax,1)\sim(x,0)$

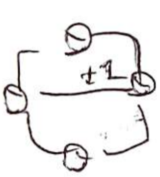
$SL(3,\mathbb{Z})$
$\cup$
$A : T^3 \to T^3$

$\varphi|_{D^3} = id$ 〜 {原点の近傍ではidになってほしい



にできる。

Fishtail



をつけて log trans. する

$T_A^4 \supset S^1$

$[T_A^4 - \nu(S^1)] \cup D^2\times S^2 =: \Sigma_A$

$\nu(S^1) = D^3\times S^1$
$\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$
なので非自明な方でくっつける

Gompf

2013/5/13
No. 5

$M \times S^1$ $\quad$ M : 3-mfd

$M \supset \gamma$: curve , $\mu \subset S^1$

$(M^3 \times S^1 - \underset{\times \mu}{\gamma}) \cup S^2 \times D^2 \cup S^2 \times D^2$

$M^3 = S^3_p(K)$

γ : normal gen. in $\pi(M^3)$

$\cancel{S^3 \times S^1} \# \begin{cases} S^2 \times S^2 \\ \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} \end{cases}$