Handle friendship seminar 2013/5/1

No. 1

ログ変換

$T^2 \times D^2 \subset X^4$

$[X^4 - (T^2 \times D^2)] \cup_\varphi T^2 \times D^2$ 3次元トーラス

$\varphi: T^2 \times \partial D^2 \longrightarrow T^2 \times \partial D^2 \cong T^3$

S.C.C.

$\varphi(\partial D^2) = p[\partial D^2] + q[\gamma]$, $\gamma \in T^2$

$\gamma = a[S] + b[S]$, $(a, q) = 1$

{これを決まると φがきまる (up to diffeo)

$T^2 \times D^2 = \underbrace{h^0 \cup h^1 \cup h^1}_{\text{3,4-handle のつけ方が決まる}} \cup \underbrace{h^2}_{\text{これをきめると}}$

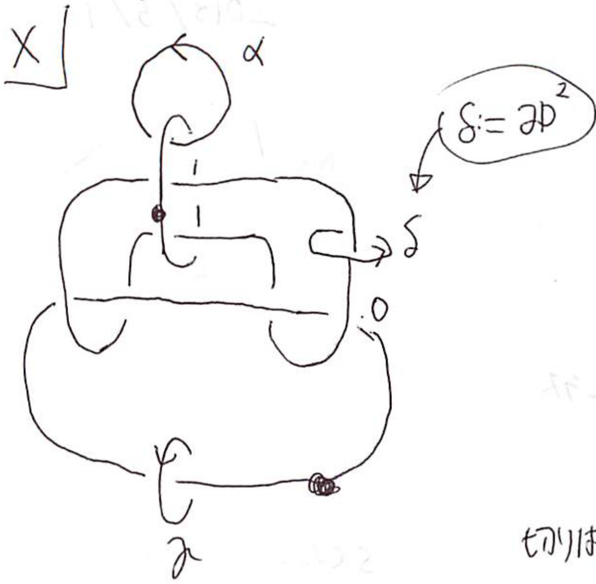
$[X^4 - (T^2 \times D^2)] \cup_\varphi T^2 \times D^2 =: X(T^2, p, q, \gamma)$

例 $X(T^2, p, 1, \gamma)$

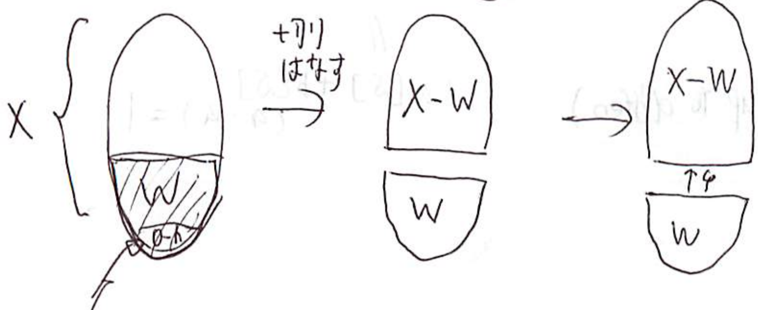
$$\varphi = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & p \end{pmatrix} \qquad \varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\quad\ \alpha \quad \gamma \quad \partial D^2$

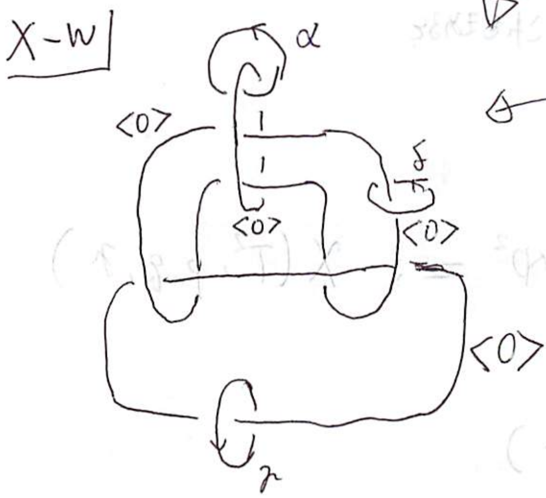
$\varphi(\alpha) = \alpha$ $\quad \varphi(\gamma)$ $\quad \varphi(\partial D^2)$



切りはなすので
X−W の操作だけ見なさい
ということ



0-hがあるので
Wを下にかく



これを3-mfd とみなし
3次元のdiffeoで動かし、
また dot をつける

Wを用意しといて、
φ^{-1}で X−W を
くっつけると思った方がいい。

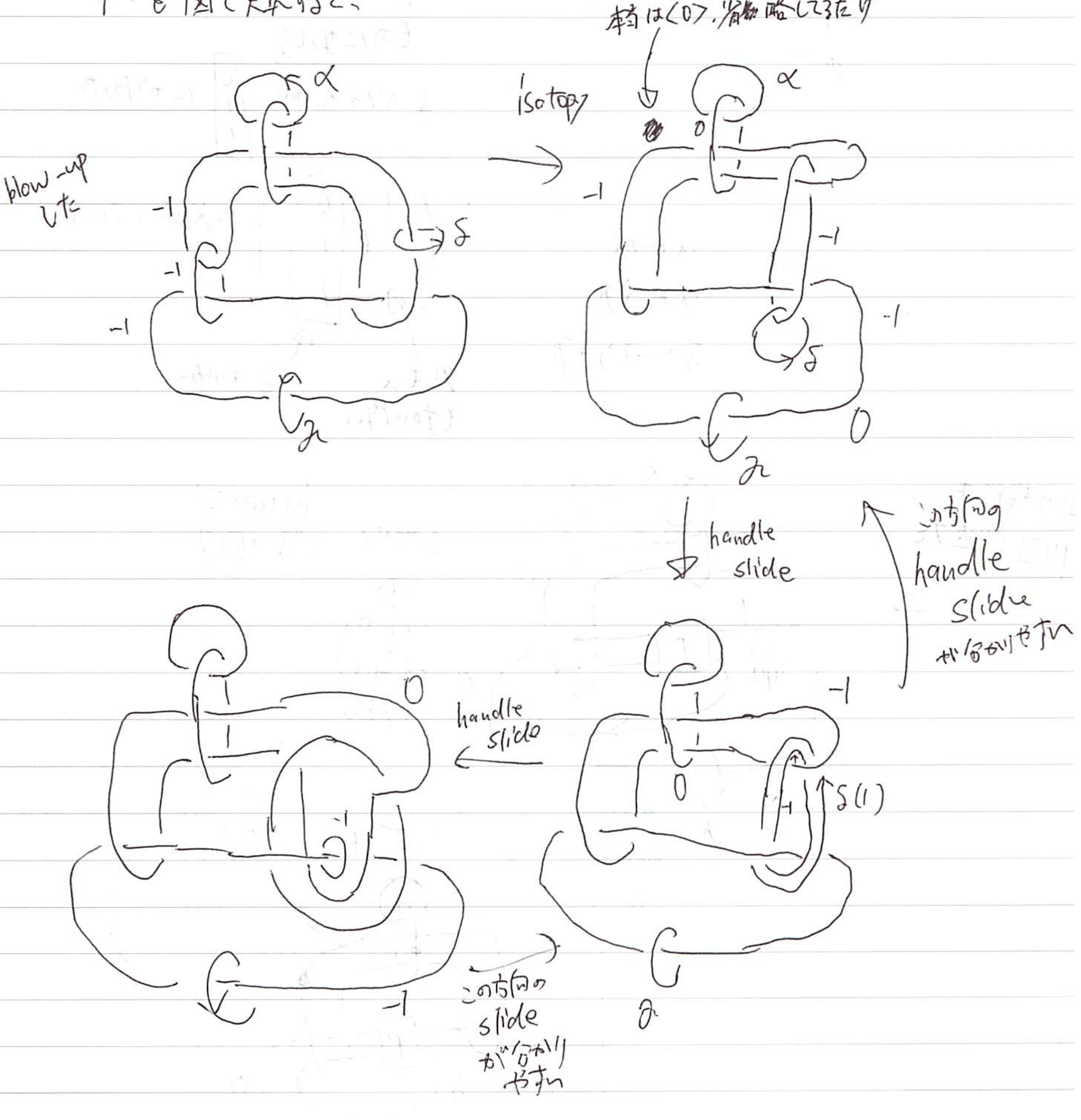
torusがあれば
log変換できる!!

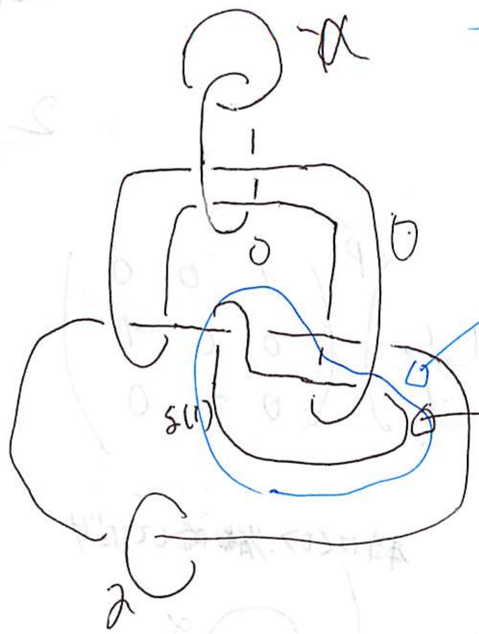
2013/5/1

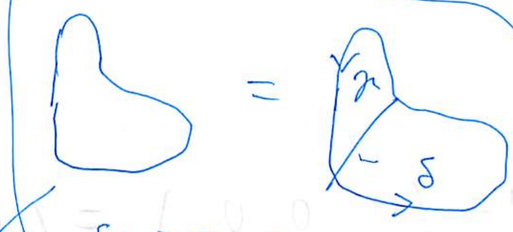
No. 2

$$\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix}^{p} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

φ^{-1} を図で実現すると、







δ ↦ λ + δ

δの像は
昔のδにλを足した
ものになってる。

δのクラスが $\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ に変わった

∴ $\begin{pmatrix}1&&0\\&1&1\\&&1\end{pmatrix}$ に対応している

λもαも動いてない

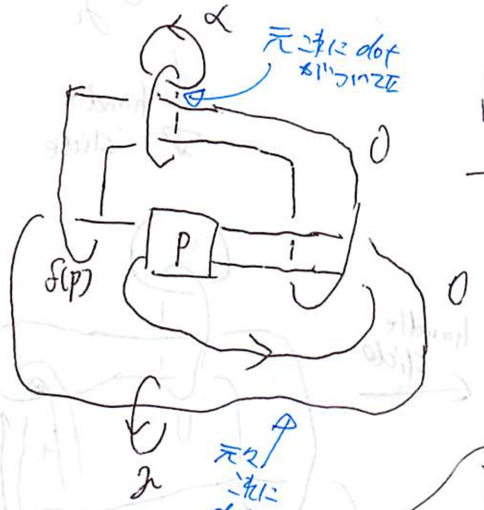
δは変わった

$\alpha \mapsto \alpha$

$\lambda \mapsto \lambda$

$\delta \mapsto \delta+\lambda$

上の操作を
p回くり返すと



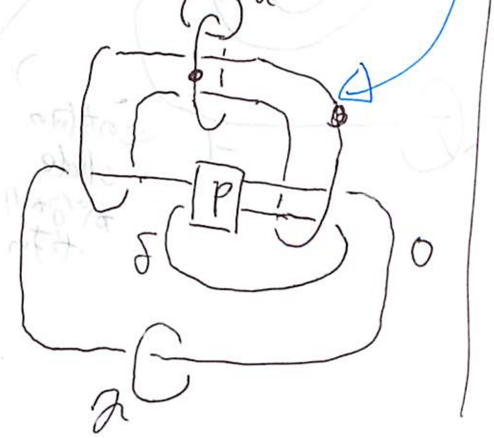
isotopy →

isotopyで
ぐるっと回す

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ に対応

δとλを入れかえるので
こっちにdotをつける

X(T^2, p, 1, λ)

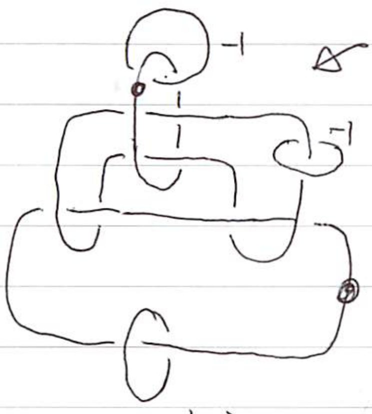


2013/5/1

No. 3

~~Casp近傍~~

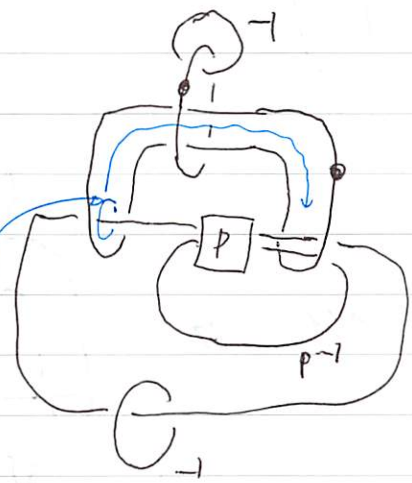
Nuclei



← $N_1 = N$

$-1 = n$

$N(p) = N(T^2, p, 1, n) \overset{\text{diffeo}}{\simeq} N$

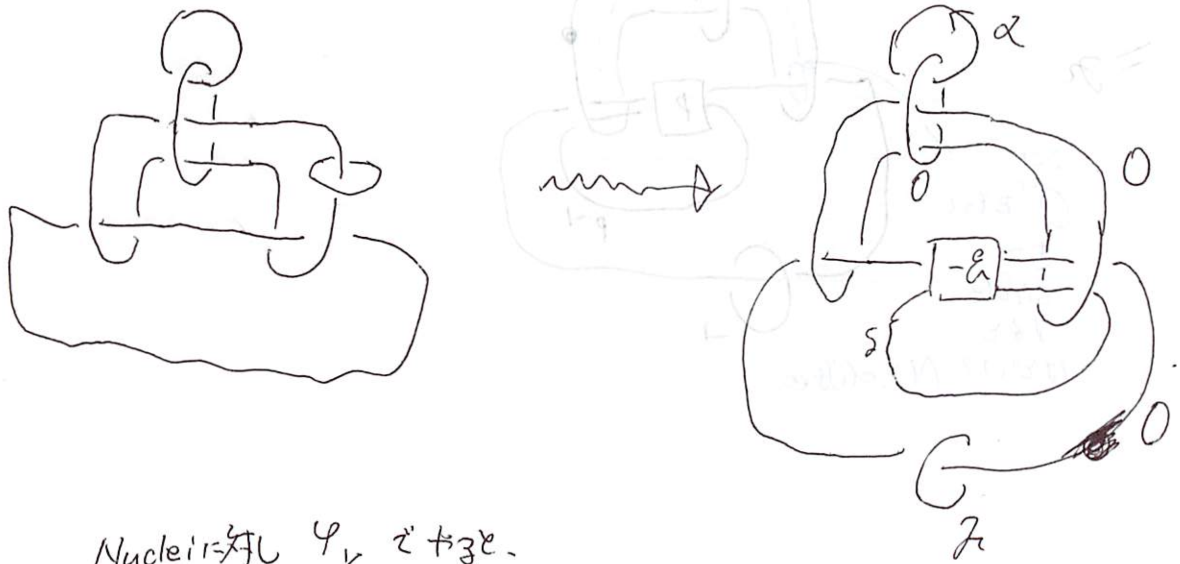


ここに O^{-1} をもってきて slide すると ほどけて N と diffeo

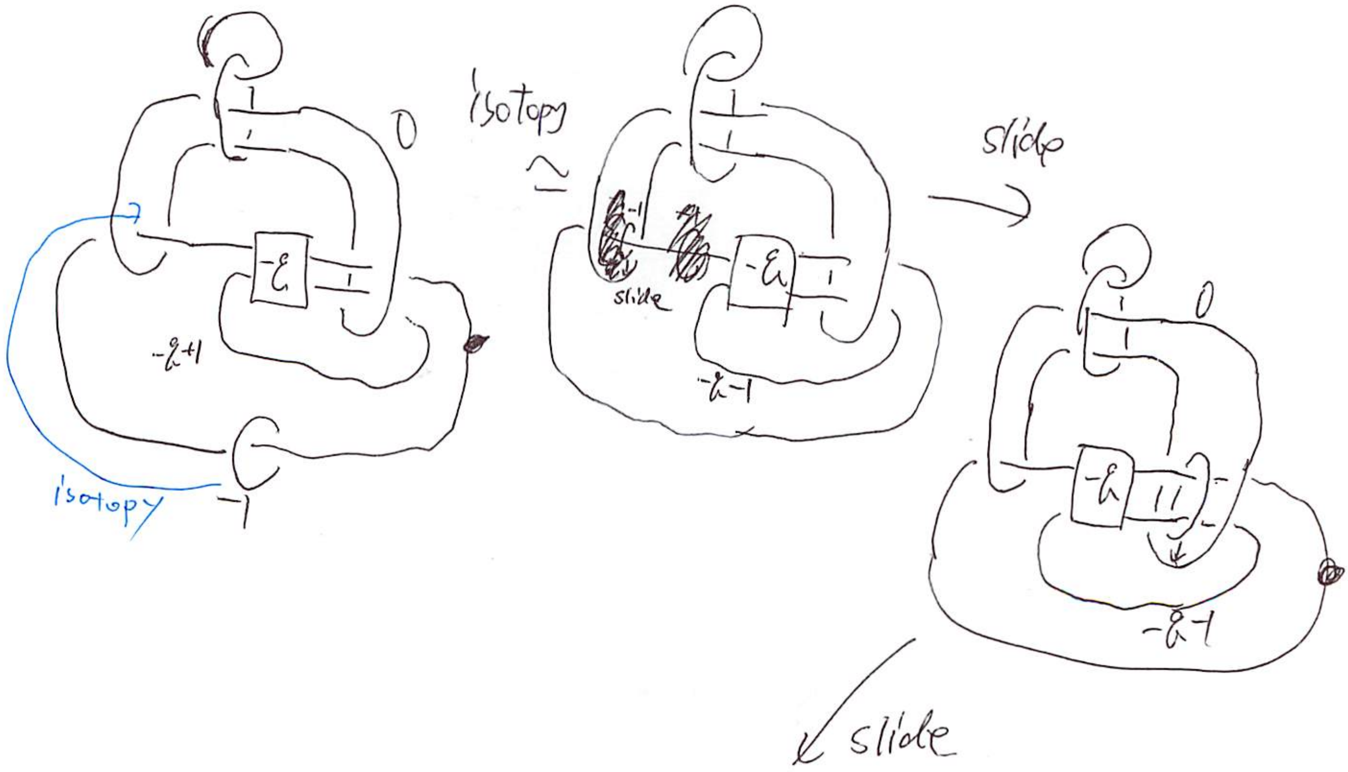
$$\varphi_{1/q} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

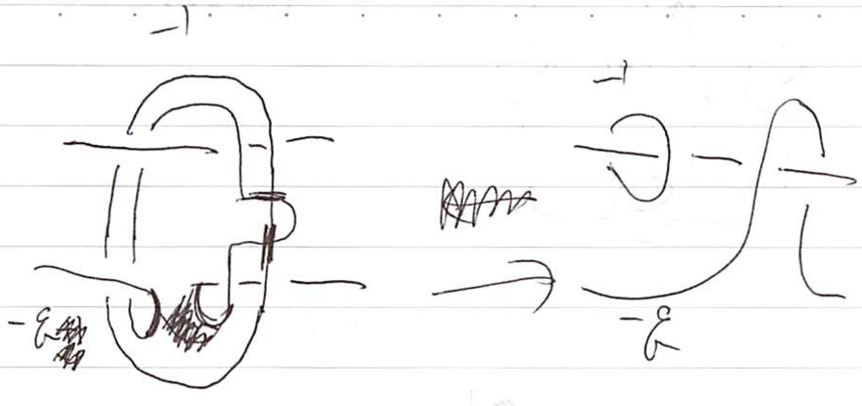
$X(T^2, 1, q, n)$

$$\varphi_{1/q}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & -q \\ & & 1 \end{pmatrix}$$



Nucleiに対し $\varphi_{1/q}$ でやると、

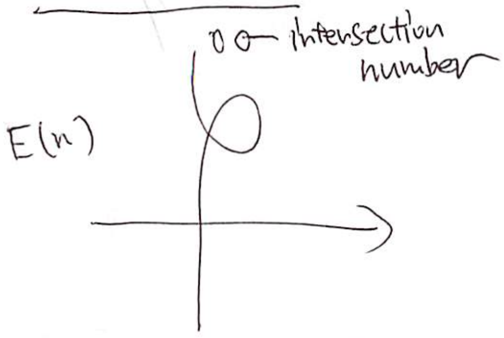




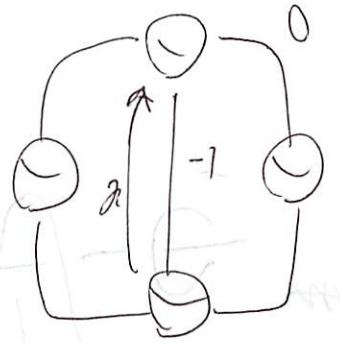
$$\therefore\ X(T^2, 1, \ell, n) \overset{\text{diffeo}}{\simeq} X(T^2, 1, \ell+1, n)$$

$$= T(T^2, 1, 0, n) = X$$

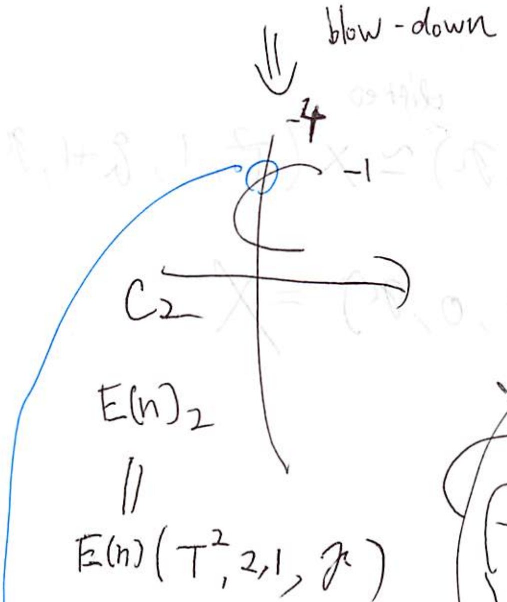
R.b — Rational blow-down

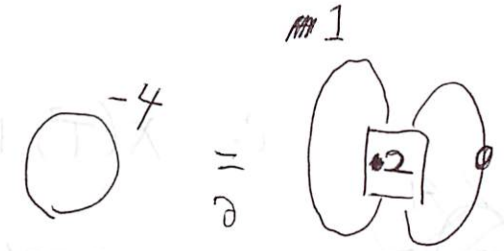


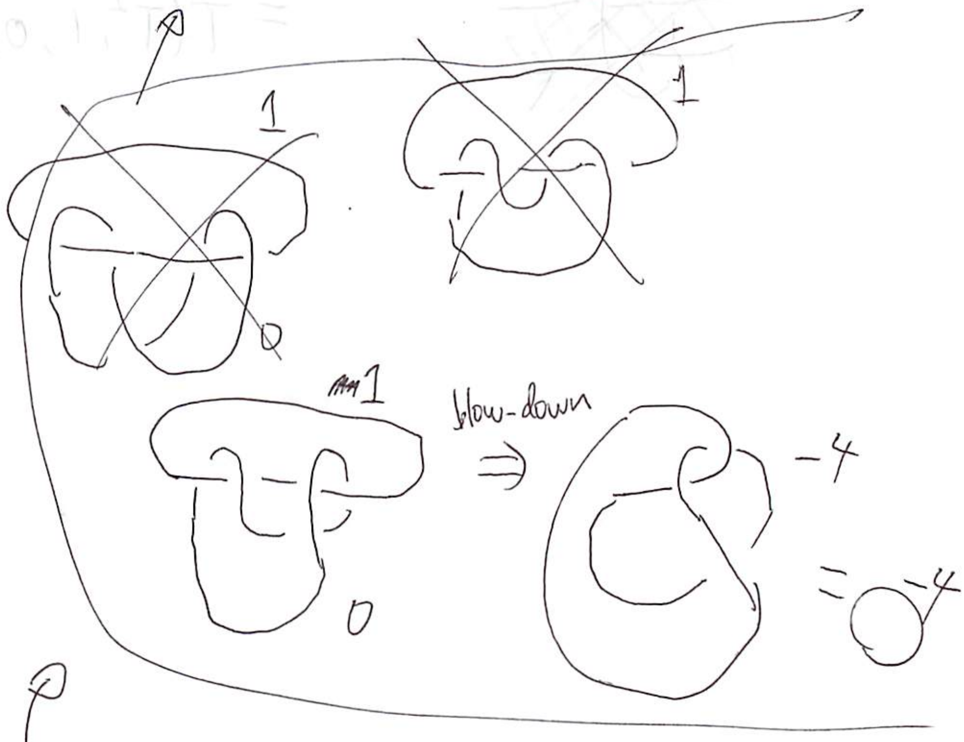
ねじれてるファイバー



通常2重点があるようなfiber考える

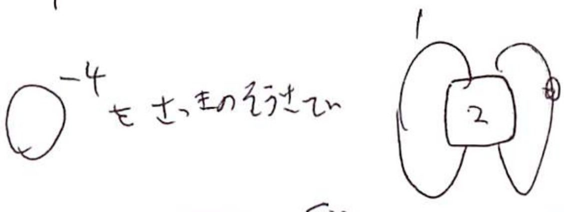






もう1回ここで
blow downすると

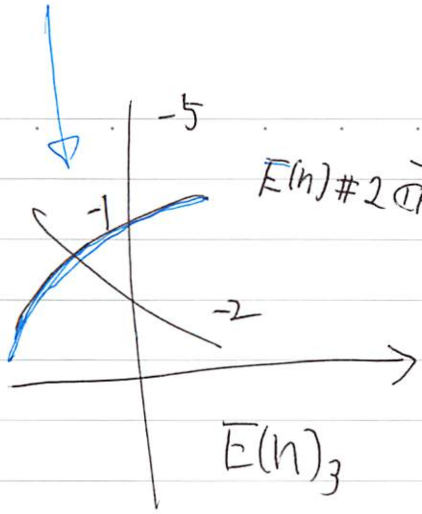
P

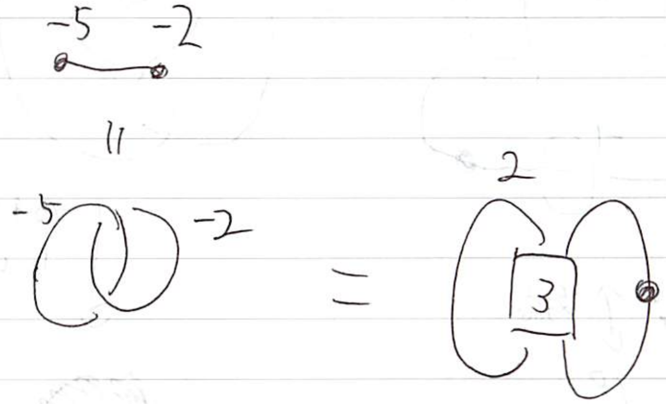


$\bigcirc^{-4}$ をさっきのそうさで [図] にいれかえる

2013/5/1

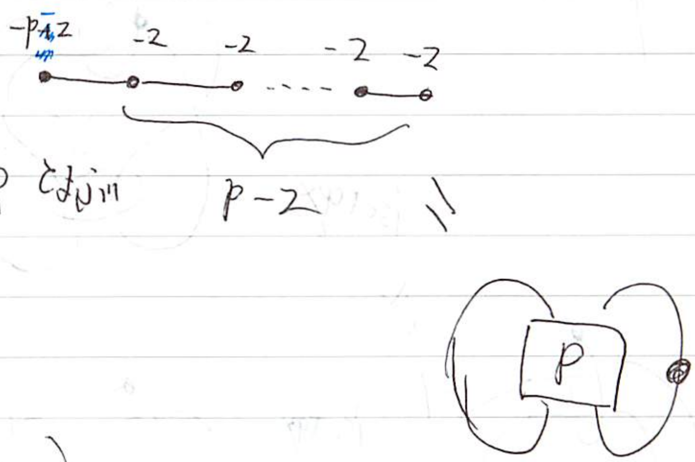
No. 5



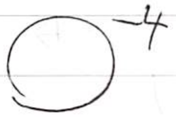


~~$E(n)_3$~~

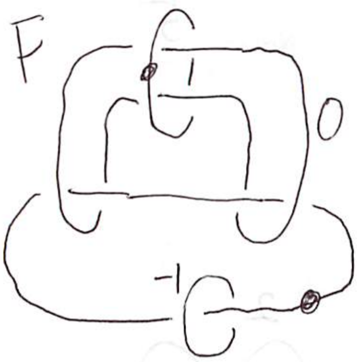
くり返す



C_p となる

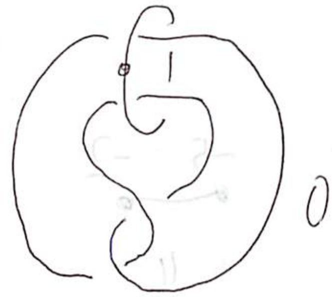
(C_2 : )

F



4-mfd の diffeo

≅



ブロウアップ
b. up.

対応

isotopy

isotopy

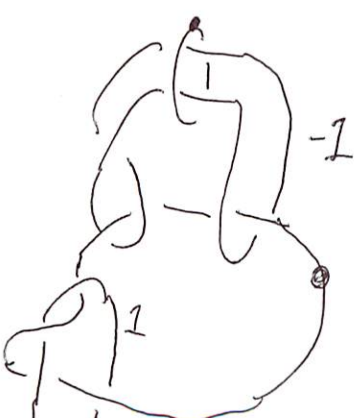
blow up

F - G_2

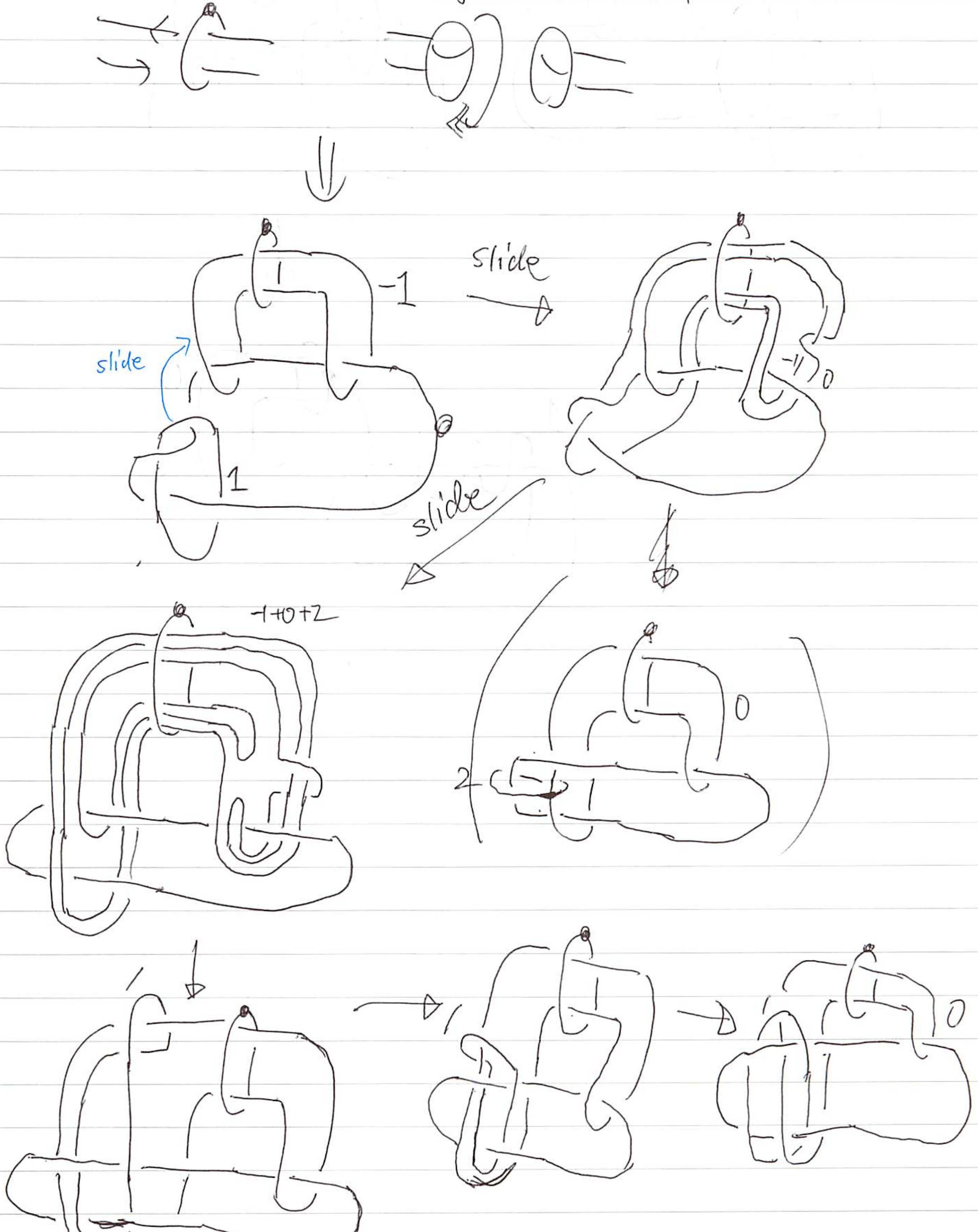
cut and paste

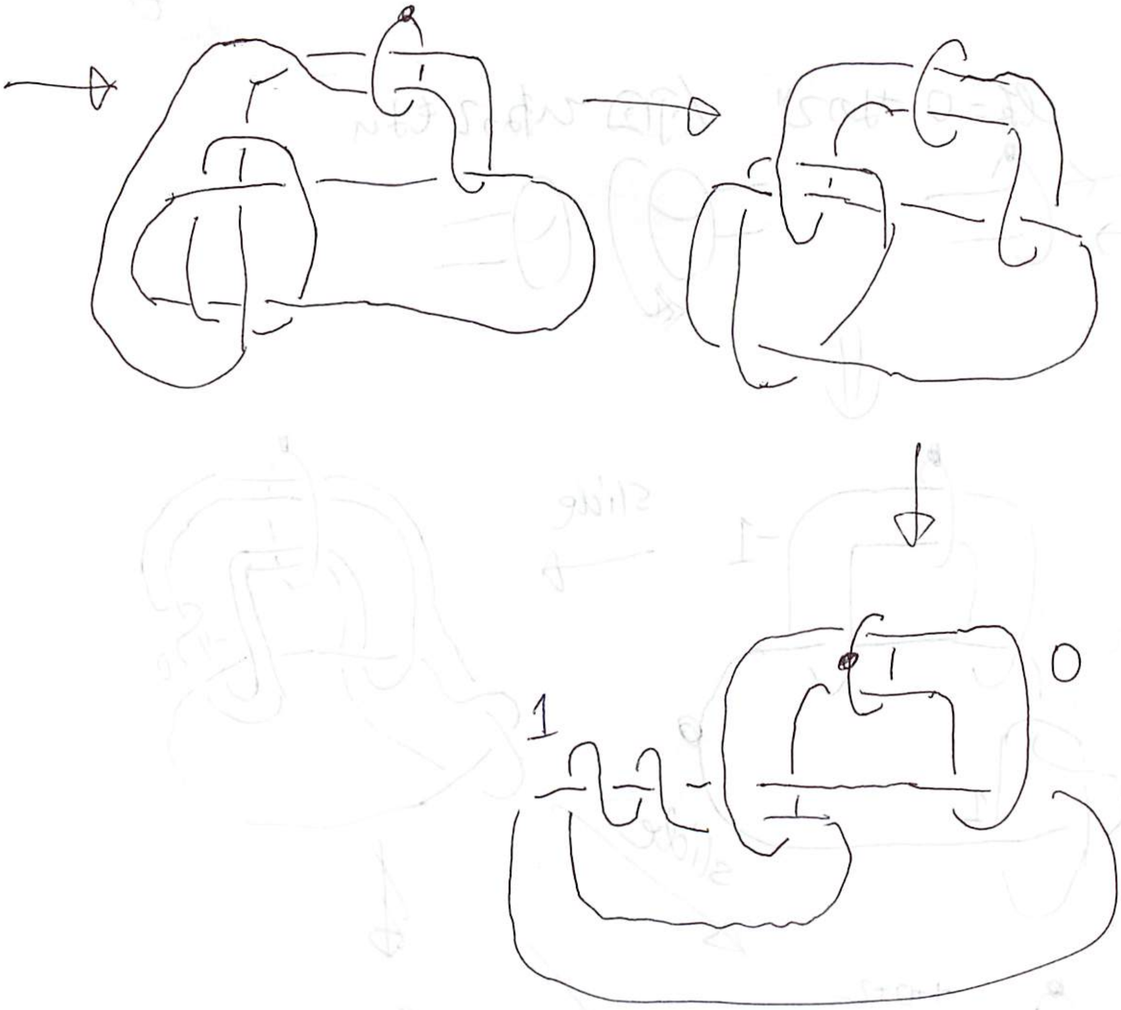
slide

slide



lk=0 なので 何回ひねってもよい




1
0

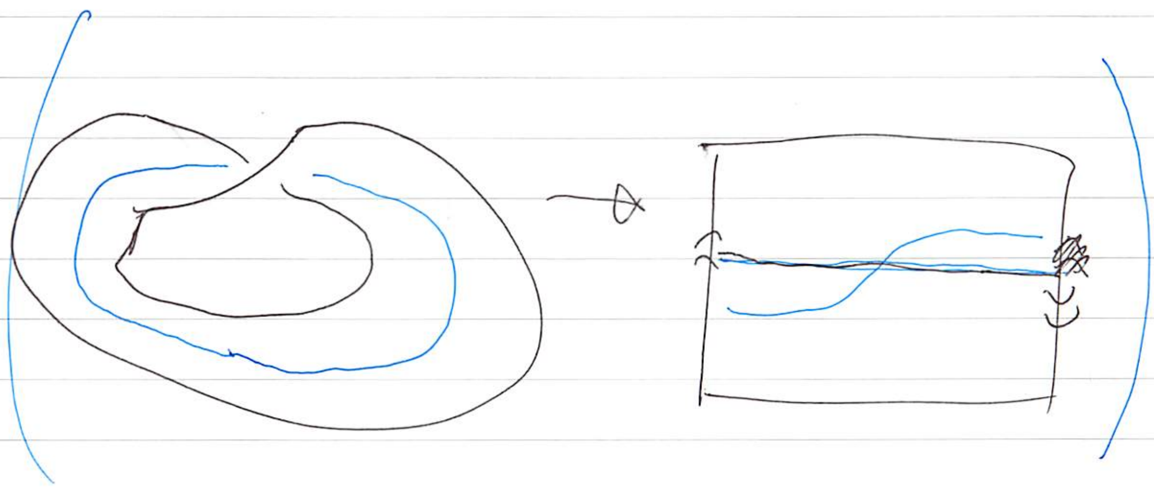
結び目手術

self. intersection = 0

normal

$T^2\times D^2 \subset X$

$[X-(T^2\times D^2)] \cup [S^3 \setminus N(K)]\times S^1$



$Y^m \subset X^n$

$\cancel{\forall \in \Gamma^\infty(\ \ ) T}$

$v \in \{v_p \in T_pX \mid p\in Y\} \longrightarrow Y$: vect. bdl

$\cong$

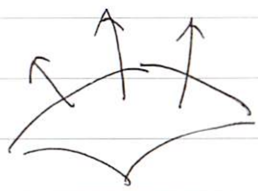
$v \in TY \oplus N$

$\parallel$

$v_1 \oplus v_2$

ベクトル場

$^\forall p \in Y$, $\alpha_p \neq 0$ なる $\alpha \in N$ がとれるとする。



$N \cong N' \oplus \mathbb{R}$

$v_2 \longmapsto (v_2', k)$

$\parallel$

$v_2' + k\alpha_p$

ミルナーの特性数について

(つづき)

$n=4$, $m=2$ とする. Y: orientable とする.

$N = N' \oplus \mathbb{R}$, $\dim N' = 1$

$w_1(N)=0$

$w_1(N')=0$

$N = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ ~~$\cdots$~~

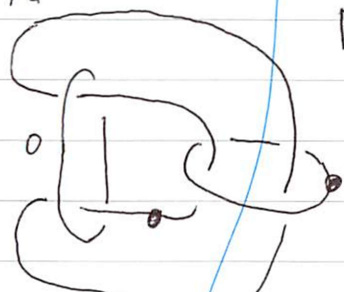
$= F \times \mathbb{R}^2$

2013/5/1

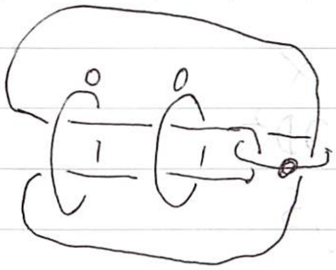
No. 8

$\varphi : \partial N(K) \times S^1 \longrightarrow T^2 \times \partial D^2$: diffeo
をつくるのに この slide をつかいなさい。
ということ。

$T^2 \times D^2$

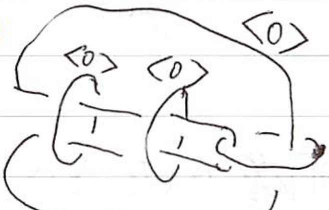


2,3-cancelling pair つける



$+3h$

$T^2 \times D^2$ を除く。
つまり dot を 0 にして
かっこをつける。



$+\langle 3h \rangle$

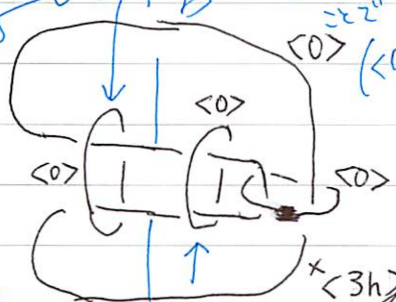
境界の diffeo で変える
ことで 再接着を表す
(⟨0⟩を0に戻す)

これは
1個の例

slide

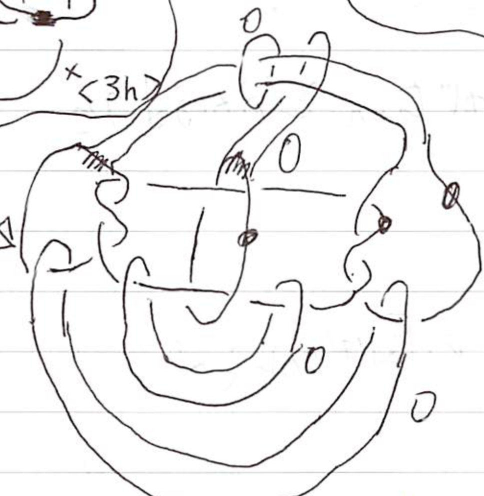
いつでも
やってるワケ
じゃない。

K: trefoil の
場合は
これっフウ。



slide

$\times \langle 3h \rangle$



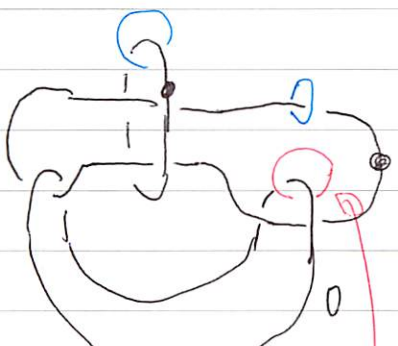
$\overset{\circ}{0}$ は $\overset{\circ}{0}$ に
$\dot{0}$ は $\dot{0}$ に戻す。

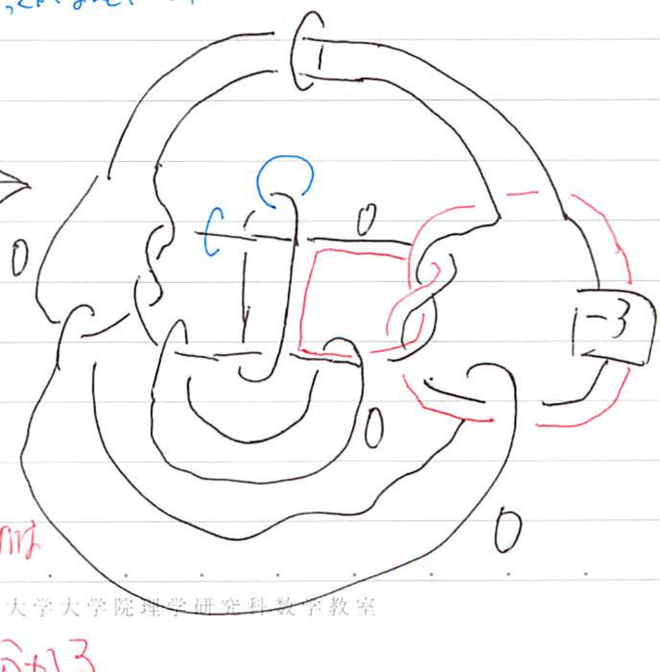
本当は

この全絵 にしないといけない。
境界が$(T^2 \times D^2)$
この絵を知っとかないといけない。

$[S^3 \setminus N(K)] \times S^1$

結局





exotic も
いっぱい
つくれる。

これが右図になるのは
上図を
たどれば分かる。

$[S^3 \setminus N(K)] \times S^1$

φ: メリディアン $m \longrightarrow \alpha$

ロンジチュード $l \longrightarrow \partial D^2$

$S^1 \longrightarrow \beta$

$[\alpha], [\beta] \in H_1(T^2)$ gen.

φを明確にしたということ

赤と青の位置がちゃんと分かるようになったということ

の図は分かっていた

2013/5/1

No. 9

exotic

$$E(n)_K \overset{\sigma\text{-exotic}}{\ncong} E(n)$$

$$SW_{E(n)_K} = SW_{E(n)} \Delta_K$$

アレクサンダー多項式

(knotの補空間のSeifert surfaceの無限巡回被覆のH$_1$ (ファーストホモロジー))

$SW : Char(V) \to \mathbb{Z}$ $V = H_2(X)/Tor$

$Char(V) = \{ u \in V \mid x \cdot x = x \cdot w \ (2) \}$ $w = w_2$

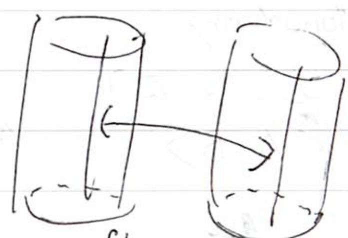
$$E(n)_{p,q} \ncong E(n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(n) \longrightarrow \mathbb{C}P^1 \ : LF \\ \quad \text{sing. fib が } 12n\text{本} \end{array} \right.$$

一意に定まる。

$E(n) = E(n+1) \#_F E(1)$

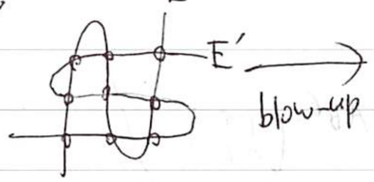
fiber sum



$\mathbb{C}P^2 \supset E$

$\{ [x, y, z] \mid x^2 z = x^3 - x z^2 \} \cong T^2$

$E \cap E'$

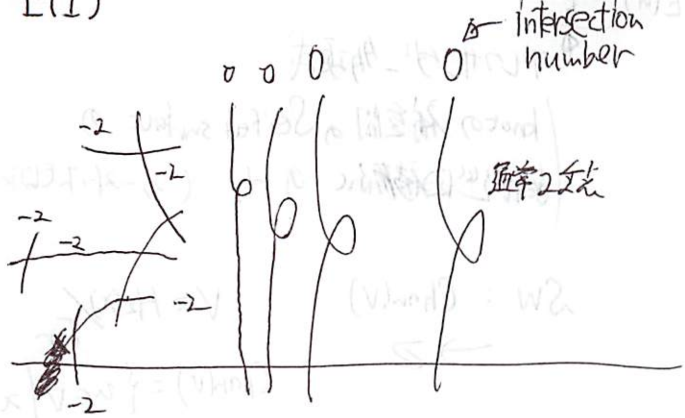


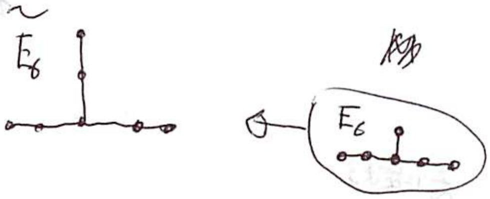
$\mathbb{C}P^2 \# 9\overline{\mathbb{C}P^2} = E(1)$

J. Park

$\mathbb{C}P^2 \# 7\overline{\mathbb{C}P^2}$ と homeo なもの

E(1)





Monodromy

$SL(2,\mathbb{Z})$
$\langle A, B\rangle$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$

1つ目の生成元については かえない

2つ目にかんしては 足し合わせる

$AA^{-1}=E$ だが インバースは 許さない!! A, B だけ.

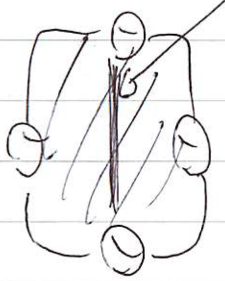
$(AB)^6=E$

関係式が決まると LFがきまる。

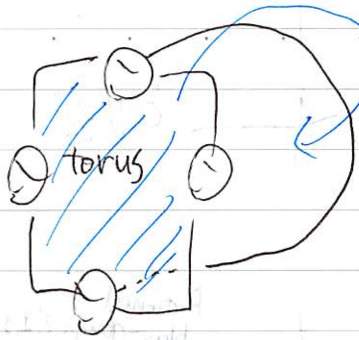
$$\left(\begin{array}{ll} \text{☺} & AB=\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix} \\ & AB^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix} \\ & AB^3=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix} \quad AB^6=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\end{array}\right)$$

$(AB)^{6n}=E$ ← E(n) に対応

これは向こう側にいる

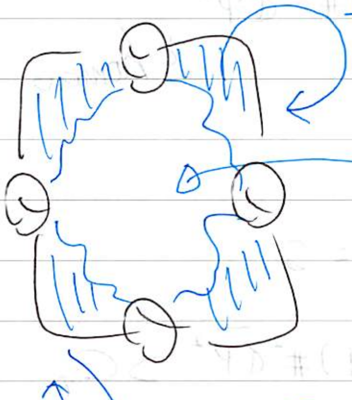


つまり



1周する。

1周する

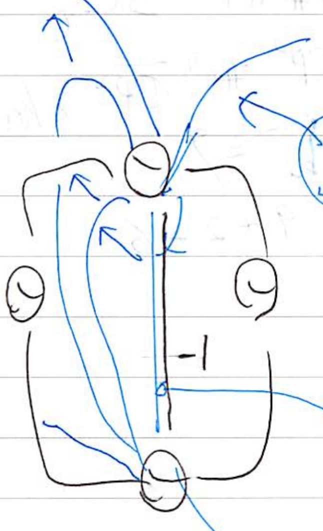


真ん中の◦
S^3 なので
向こうまでいって
1周してかえってくる.

$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}1\\1\end{matrix} \end{pmatrix}$

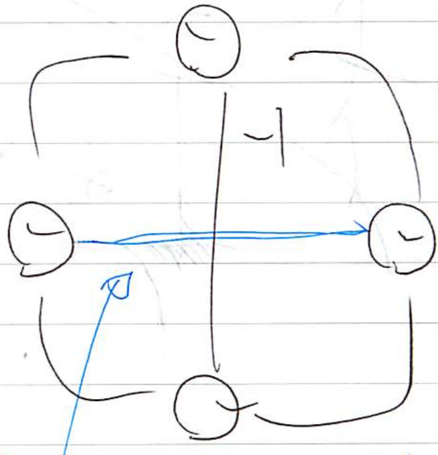
これに対応

S^3 なので



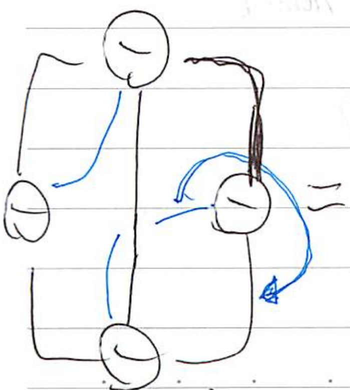
generator

Dehn twistして
向こうにいく.

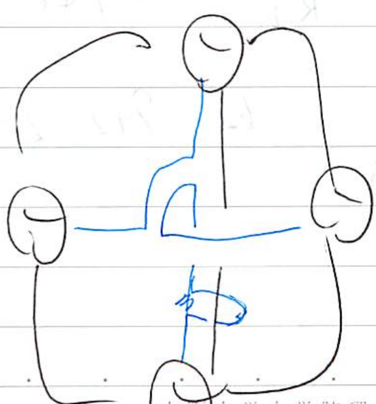


このgeneratorは $\lceil^{-1}$ という
ハンドルをこえられないので
ぐるっと1周できない
なので slideする

slide

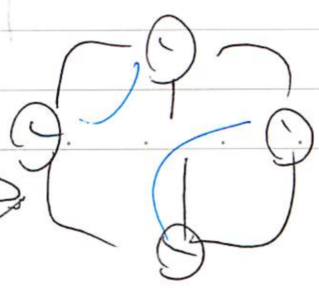


=



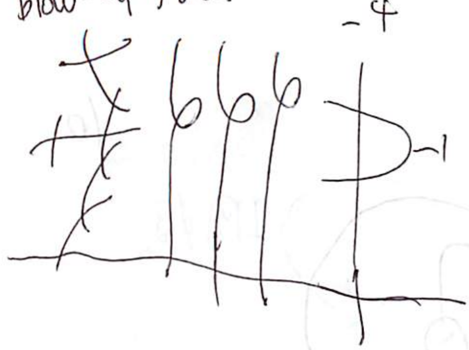
$A = \begin{pmatrix} \begin{matrix}1\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}1\\1\end{matrix}} \end{pmatrix}$

これに対応

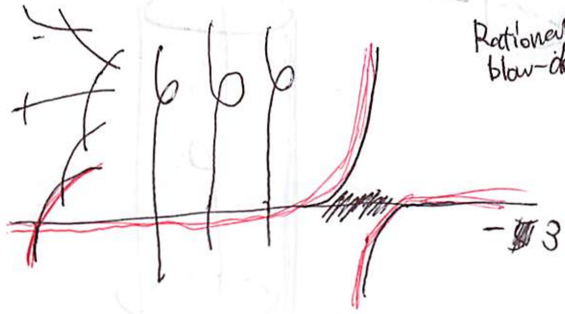


ぐるっと1周する

1回 blow-upすると、



とする。



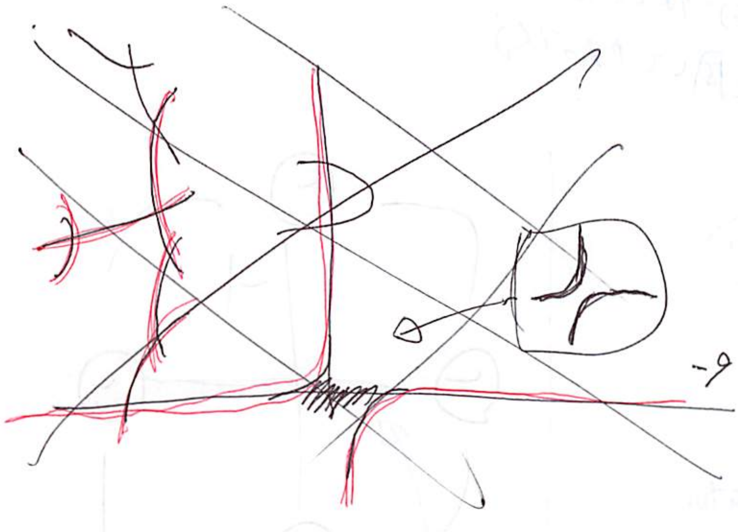
Rational blow-downできる

$E(1)\#\overline{\mathbb{CP}^2}\supset C_3$

$\to \mathbb{CP}^2\#^8\overline{\mathbb{CP}^2}$ とhomeo。

$b_2^- = 9$

$9+1-2=8$

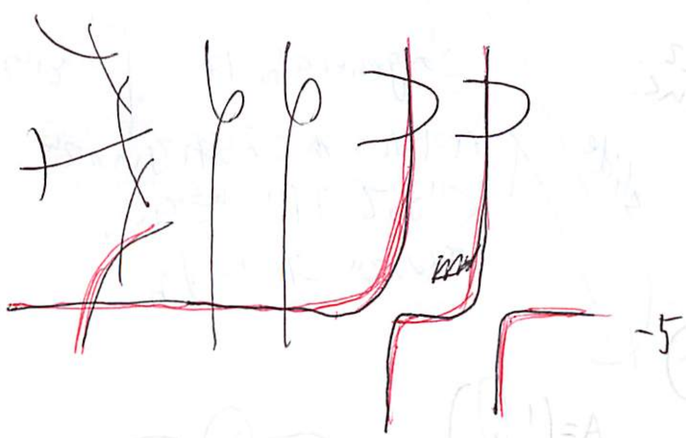


$E(1)\#^2\overline{\mathbb{CP}^2}\supset C_7$

$\to \mathbb{CP}^2\#^7\overline{\mathbb{CP}^2}$ とhomeo

$b_2^- = 9$

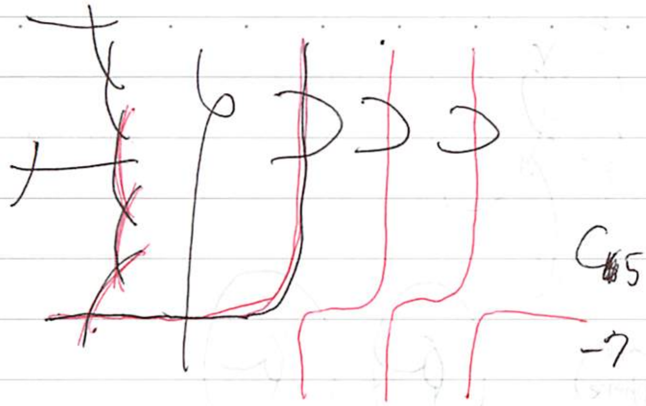
$9+2-6$



$E(1)\#^2\overline{\mathbb{CP}^2}\supset C_3$

$\xrightarrow[R.b]{} \mathbb{CP}^2\#9\overline{\mathbb{CP}^2}$:homeo

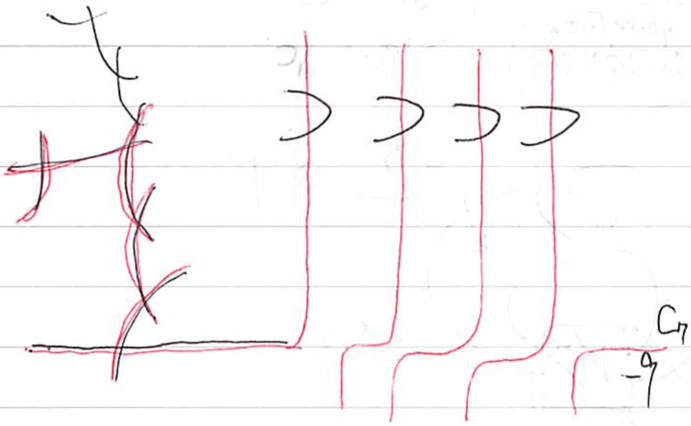
$b_2^- = 9+2-2=9$



$E(1)\#^3\overline{\mathbb{CP}}^2 \supset C_5$

$b_2^- = 9+3-4 = 8$

$\xrightarrow{R.b.} \mathbb{CP}^2\#8\overline{\mathbb{CP}}^2$ と homeo



$E(1)\#^4\overline{\mathbb{CP}}^2 \supset C_7$

$\xrightarrow{R.b.} \mathbb{CP}^2\#^7\overline{\mathbb{CP}}^2$ と homeo

$b_2^- = 9+4-6=7$

blow up した回数

⑦ ← 7−1

handle decom. したん いないので、すると面白いかも？

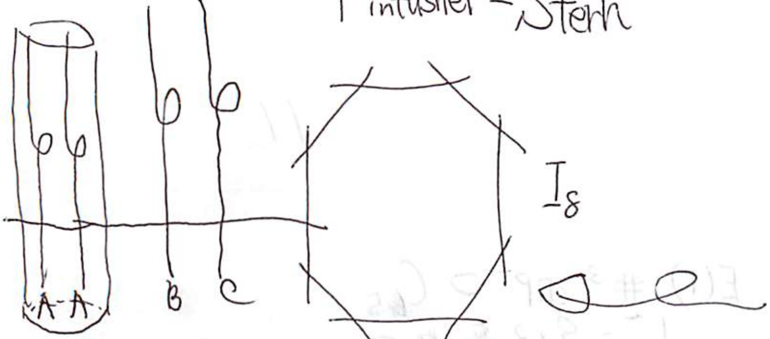
Persson, Configulations of Kodaira fibers on rational elliptic surfaces. Math Z 205 (1990) 1-47

みんな これ見てやってる。

安井先生も
このあたりから
研究をしているのでは？

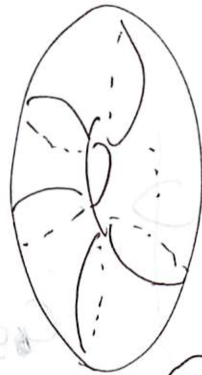
Fintushel - Stern

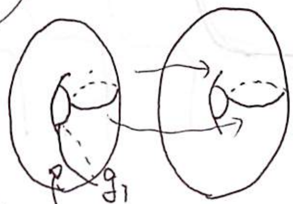
別のconfigurationつかっている。



ダブル
double node

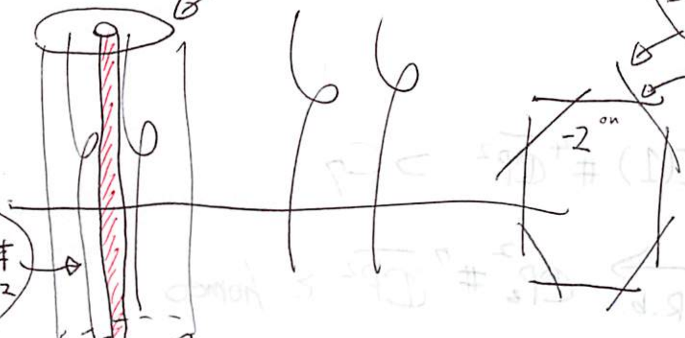
モノドロミー A, A





$\varphi(m) = g_1 \subset T^2$

この近傍でknot surg. する



1つ1つがsphere

ここでsphere同士が1点で交わっている

1本1本がT²

tubular n.b.h.d. $T^2 \times D^2$

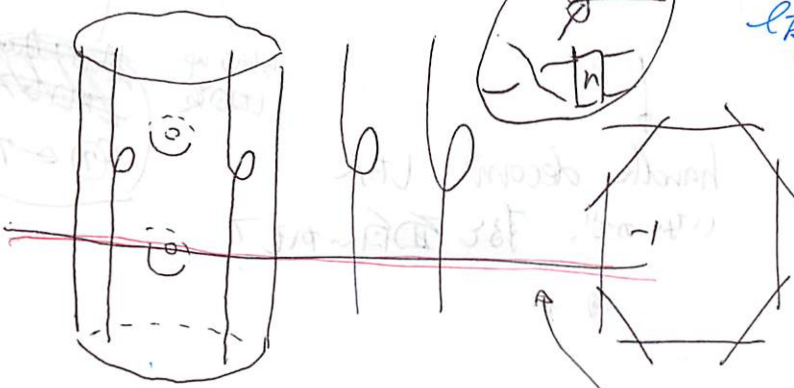
K : twist knot

$\Sigma \supset \Gamma$

$\times S^1$

$lk_\Sigma(\Gamma, \Gamma) = 1$

Knot surgery



Knot surg. した

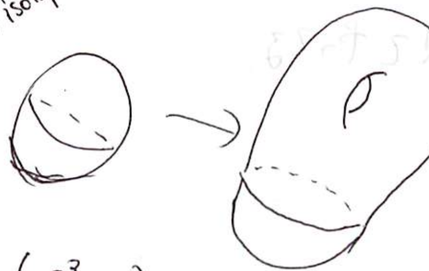
水平に描いているのは section（埋め込まれた Sphere）

$E(1) \to \mathbb{C}P^1$

$\varphi(m) =$ vanishing cycle と isotopic

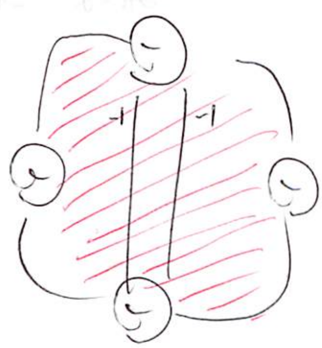
meridian

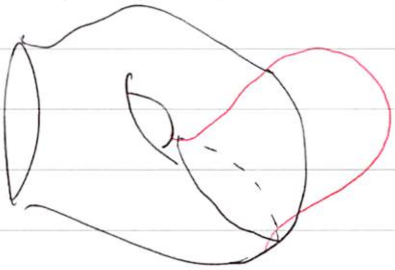
ということ。

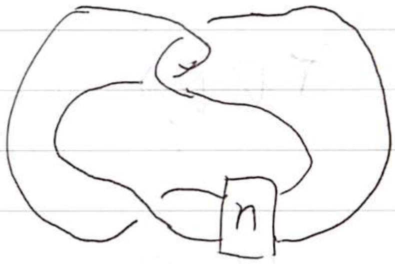


$X_K = [X - (T^2 \times D^2)] \underset{\varphi}{\cup} (S^3 - K) \times S^1$

φ



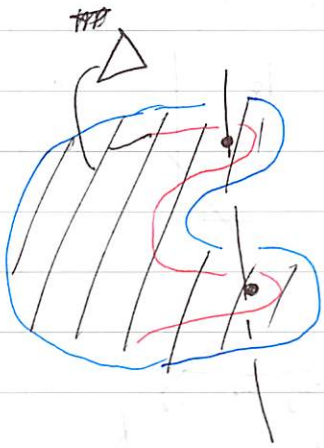


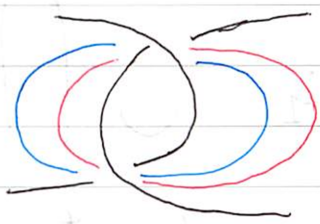


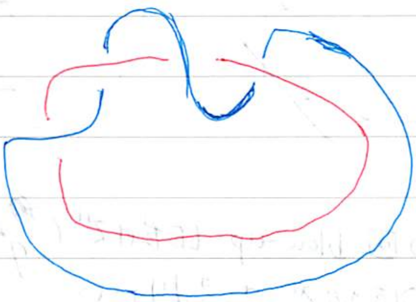
$\partial\Delta = T$

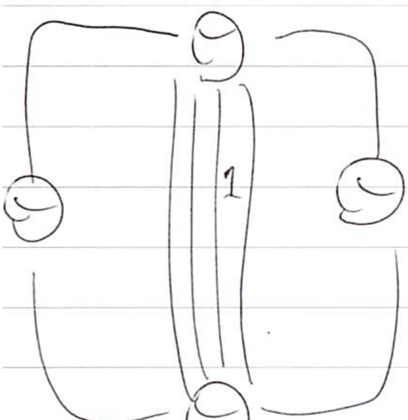
$\Delta \cap \cancel{\text{軸}} = 2\text{pt}.$

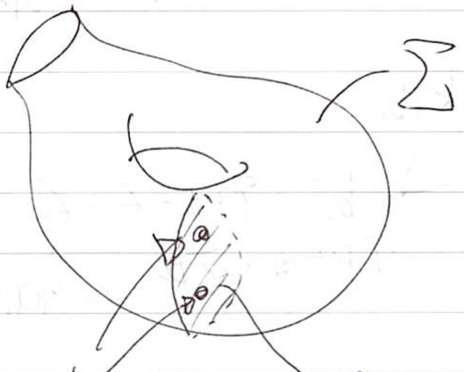
K_n





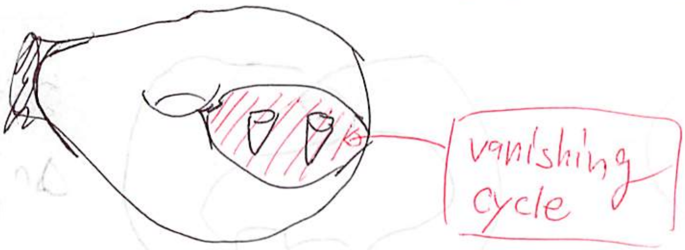


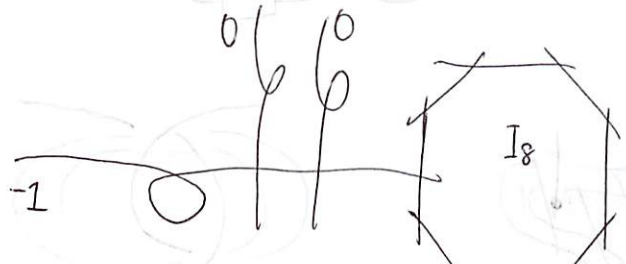


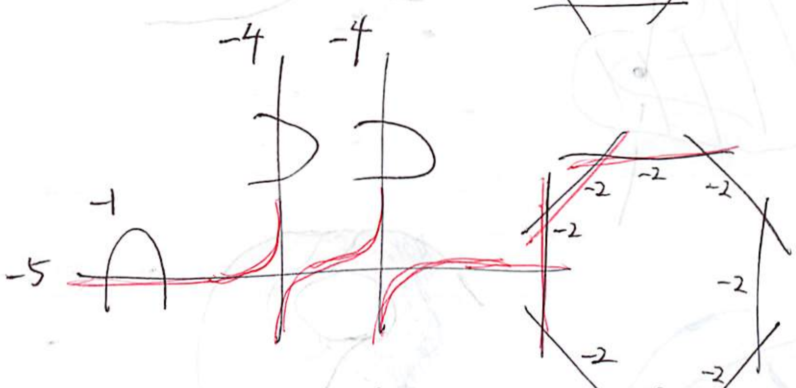


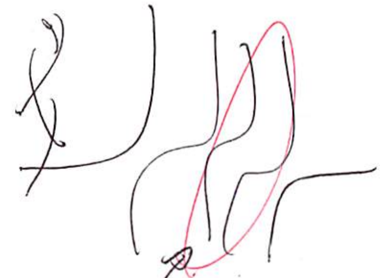
meridian = vanishing cycle

1-1-1 = -1

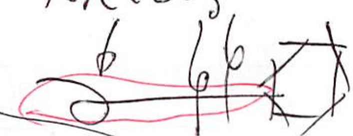








この2つ分を
横においただけで
完成している



$E(1)_{K_n} \# 3\overline{\mathbb{CP}^2} \supset C_7$

3回 blow-up しただけで C_7 が
みえるので さっきよりいい。
4回blow-up

R.b.

$b_2^- = 9+3-6=6$

$\mathbb{CP}^2 \# 6\overline{\mathbb{CP}^2}$ とhomeo.

nによってる。
無限個つくれる。
diffeoでない