

# 微分トポロジー'25

## 4次元トポロジーの新展開

立命館大学 OIC キャンパス (H323)

2025 年 3 月 8 日 ~ 3 月 10 日

**概要.** 本研究集会は, Lasagna module (ラザニア加群) に関する勉強会です.

### プログラム

#### 3月8日 (土曜日)

14:00–15:00 佐野 岳人 (理研) **Khovanov ホモロジー入門 I: 構成**

**概要:** Khovanov ホモロジーは, 2000 年に M. Khovanov によって導入された結び目ホモロジー理論であり, Jones 多項式の圏化を与えます. 私の講演では 3 回に渡って Khovanov ホモロジー理論の基礎的な事項を解説し, 本ワークショップの主題である Skein lasagna 加群を理解するために必要な土台を提供します. 第 1 回目の講演では, Khovanov 複体の構成とその不変性について説明します. 特に, この構成の背後にある Frobenius 代数と  $1+1$  次元位相的場の理論 (TQFT) との関係に焦点を当てた解説を行います.

15:20–16:20 佐野 岳人 (理研) **Khovanov ホモロジー入門 II: 関手性**

**概要:** Khovanov ホモロジーは, 結び目のコボルディズムに対して関手的に振る舞います. すなわち, 2 つの結び目の間にある曲面は, 対応するホモロジー群の間の準同型を誘導します. 本講演では, コボルディズム写像の構成方法と, それがアイソトピーの下で不変であることの証明について説明します.

16:40–17:40 飯田 暢生 (東京科学大学) **Khovanov-Rozansky homology について**

**概要:** Khovanov-Rozansky homology について Khovanov ホモロジーは結び目に対して定まる 2 重次数を持つベクトル空間であって, 次数付き Euler 数をとると Jones 多項式を復元するという意味で Jones 多項式の圏化である. Reshetikhin-Turaev 理論によれば Jones 多項式は  $\mathfrak{sl}_2$  の量子群のベクトル表現に付随する結び目多項式であり,  $\mathfrak{sl}_n$  版の多項式不変量も定義される. これを圏化する結び目ホモロジーには Khovanov-Rozansky によるものを始め様々な構成が知られている. これらを概説する.

#### 3月9日 (日曜日)

10:00–11:00 軽尾 浩晃 (学習院大学) **線形スケイン理論 1**

**概要:** 4次元多様体に 2 ハンドルを付け加えても構造が保たれるかという問題は, 2 ハンドルの接着領域 (3次元球面内の結び目の環状近傍) において Kirby move ができるかという問題に帰着される. Skein lasagna 加群でも同様の問題意識があり, 適切な color を結び目に与える必要がある. 本講演では, 3次元多様体の量子不変量の構成の際に, どのように color を与えていたかを復習し, 4次元多様体の場合にどうすることが成り立って欲しいかを説明する. この前半部分を担当する.

11:20–12:20 湯浅 亘 (京都大学) **線形スケイン理論 2**

**概要:** 線形スケイン理論 1 のアブストラクトの内容の後半部分を担当する. 特に, Hogancamp-Rose-Wedrich による dotted Temperley-Lieb category を用いた annular Bar-Natan category における Kirby color の構成に焦点を当てる.

### 昼休み

14:00–15:00 小川 将輝 (東北大学) **Skein lasagna module の構成**

**概要:** Lasagna(ラザニア) filling と呼ばれる cobordism とそれに対応する Lasagna 代数と呼ばれる代数的な対象を導入する. Khovanov-Rozansky ホモロジーの関手性を使うことで, Khovanov-Rozansky ホモロジーが Lasagna 代数の構造を持つことを述べたのちに, Lasagna 加群を導入する. この構成を理解することで, Lasagna 加群が Khovanov-Rozansky の枠組みのみならず, 多くの関手性を満たす結び目に関するホモロジー理論において, 考えることのできる枠組みであることが分かる.

15:20–16:20 小川 将輝 (東北大学) **Skein lasagna modules for 2-handlebodies**

**概要:** この講演では, 前の講演で述べた Lasagna 加群を 2-handlebody に関して考えた, Manolescu と Neithalath の結果について述べる. 2-handlebody の Lasagna 加群の計算は, 2-ハンドルの attaching link の cable をとったものの Khovanov-Rozansky ホモロジーを, ある同値関係で割ったものの計算に帰着される. これを cabled Khovanov Rozansky ホモロジーという. この結果の証明を眺めることで, Lasagna 加群の元の具体的な構成と, それらの元と cabled Khovanov-Rozansky ホモロジーの元との対応を知ることができる.

16:40–17:40 浅野 智紘 (数理解析研究所) **Skein lasagna module & handle decompositions**

**概要:** Manolescu, Walker, Wedrich による論文 “Skein lasagna modules and handle decompositions” の概説を行う. この論文では 4 次元多様体のハンドル分解に基づいて, 一般の状況での Skein lasagna 加群の記述公式が与えられている. ここでは特に 1-handle の取り扱いに重点を置いて解説したい.

18:30– 懇親会

## 3 月 10 日 (月曜日)

10:00–11:00 佐野 岳人 (理研) **Khovanov ホモロジー入門 III: Lee ホモロジーと Rasmussen 不変量**

**概要:** Khovanov ホモロジーの定義に用いられる Frobenius 代数を変形することで, Khovanov ホモロジーの変種を得ることができます. その一つが Lee ホモロジーであり, そこから整数値の結び目不変量である Rasmussen 不変量が得られます. 本講演ではこれらの概念の定義を紹介し, その重要な応用である, Rasmussen による Milnor 予想の組み合わせ論的な再証明や, Piccirillo による Conway 結び目がスライスでないことの証明などについても紹介します.

11:20–12:20 小川 将輝 (東北大学) **Detecting exotic 4-manifolds via skein lasagna modules**

**概要:** この講演では, Ren と Wills による Skein lasagna 加群を用いた exotic 微分構造の検出についての結果を述べる. 特に, 結果の証明に用いられる lasagna  $s$ -不変量に関して述べたのちに, それを用いて実際にどのような計算が行われているかを外観したい.

## 午後はインフォーマルセミナー

14:00–16:00 (佐野 岳人) **Rasmussen 不変量のコボルディズム的解釈と計算**

**概要:** Rasmussen の  $s$ -不変量は Khovanov ホモロジーから得られる整数値の結び目不変量で, Milnor 予想の組み合わせ的な再証明を与えるなど低次元トポロジーへの目覚ましい応用を持つ.  $s$ -不変量は量子次数によるホモロジー群のフィルトレーションを用いて定義されるものであるが, そこから幾何的な意味を読み取るのは難しい. 本発表では, Bar-Natan による Khovanov ホモロジーのタングルとコボルディズムを用いた定式化に基づいて,  $s$ -不変量に対してもコボルディズム的な解釈を与える. この解釈によって,  $s$ -不変量は結び目のタングル分解から計算ができるようになる. さらに応用として, 特定のプレツェル結び目の無限族に対してその  $s$ -不変量が決定できることを示す.