# Biased random walk conditioned on survival among Bernoulli obstacles: subcritical phase

福島　竜輝

京都大学数理解析研究所

Jian Ding, Rongfeng Sun, Changji Xu との共同研究

# 問題の設定

- $(S := (S_n)_{n\geq 0}, \mathbf{P})$: $\mathbb{Z}^d$ の SRW で原点を出発するもの;
- $(\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}^d}, \mathbb{P})$: 独立同分布，Bernoulli(p).

ランダムウォークの $\mathcal{O} = \{x \in \mathbb{Z}^d : \omega_x = 0\}$ への到達時刻を

$$\tau_{\mathcal{O}} := \inf\{n \geq 0 : S_n \in \mathcal{O}\}$$

とする．問題は $S$（と $\mathcal{O}$）が以下のように重み付けた測度のもとでどのように振る舞うか：

$$\mathrm{d}\mu_N^h = \frac{1}{Z_N^h} e^{\langle h, S_N\rangle} 1_{\{\tau_{\mathcal{O}} > N\}} \mathrm{d}\mathbb{P} \otimes \mathbf{P}.$$

$h \in \mathbb{R}^d$ は外力を表す．媒質の法則についても平均を取っていることに注意.

# 問題の設定

「媒質に関する平均」の物理的意味はあまり明確ではないが別の解釈がある．ランダムウォークの軌跡を

$$S_{[0,N]} := \{S_i : 0 \le i \le N\} \subset \mathbb{Z}^d$$

とすると

$$\mathbb{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N) = \mathbb{P}(S_{[0,N]} \cap \mathcal{O} = \emptyset) = p^{|S_{[0,N]}|},$$

だから，$\mathcal{O}$ に関する平均を先に取ることができて，

$$\mu_N^h(\mathrm{d}S) = \frac{1}{Z_N^h} e^{\langle h, S_N \rangle - \nu |S_{[0,N]}|} \mathbf{P}(\mathrm{d}S), \quad \nu = \log \frac{1}{p}.$$

これは *self-attractive polymer* のモデルと見なせる．

# 外力がない場合の局在

Sznitman (1991), Bolthausen (1994), Povel (1999) は，以下のような“驚くべき”局在現象を証明した：

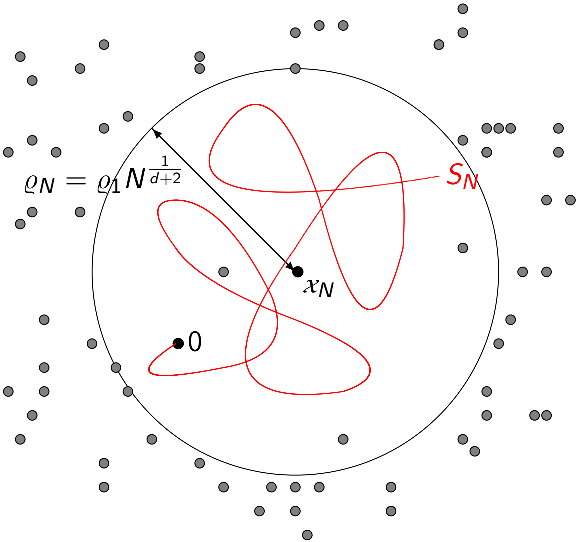
**Theorem (Confinement property)**

任意の $d \geq 2$ に対し，$\varrho_1 > 0$ とランダムな $x_N \in \mathbb{Z}^d$ が存在して，全ての $\epsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N^0\left(S_{[0,N]} \subset B\left(x_N; (1+\epsilon)\varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}\right)\right) = 1.$$

**Remark**

実は $\mathcal{O}$ の分布も見た場合，上の球の中にはほとんど障害物がないことも言える.




この図は不正確で，ステップ数 $= N \gg N^{\frac{d}{d+2}} \approx$ 球の体積，だから球の内部はほとんど軌跡に埋め尽くされている．

# 外力への応答と優臨界相

$h \neq 0$ のとき相転移が起こることが知られている.

**Theorem (Sznitman (1995))**

$d \geq 2$ とする．あるコンパクト集合 $K$ が存在して

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N^h(|S_N| = o(N)) = \begin{cases} 1 & \text{if } h \in K^\circ, \\ 0 & \text{if } h \notin K. \end{cases}$$

さらに優臨界相の様相は最近の研究で詳しく分かっている.

**Theorem (Ioffe–Velenik (2013))**

任意の $h \notin K^\circ$ に対して $\mu_N^h$ のもとで

$$\exists \lim_{N\to\infty} \frac{S_N}{N} = v_h \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},$$

$$\frac{S_N - v_h N}{\sqrt{N}} \text{ は Gauss 分布に収束.}$$

# 主結果

今回の主結果は劣臨界相でのスケール極限である.

$$\varrho_N = \varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}, \quad \boldsymbol{e}_h := h/|h|$$

とする.

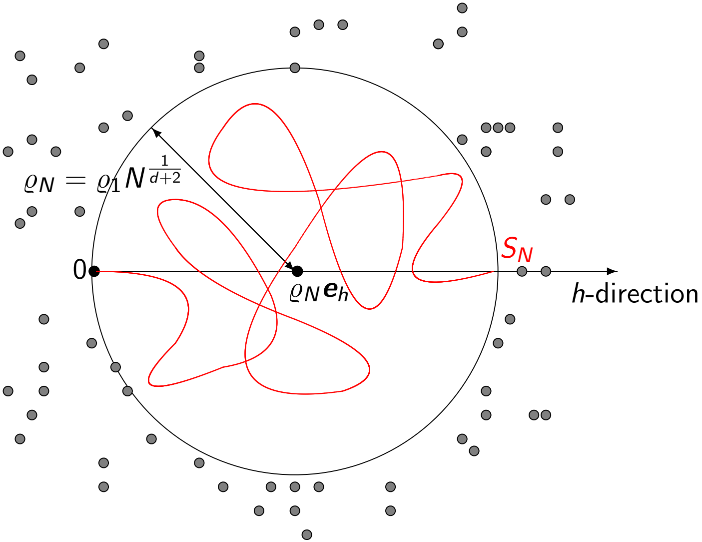
Theorem (Ding–F.–Sun–Xu (2019))

任意の $h \in K^\circ$ と $\epsilon > 0$ に対して, $\mu_N^h$ のもとで

$$B(\varrho_N \boldsymbol{e}_h; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]} \subset B(\varrho_N \boldsymbol{e}_h; (1+\epsilon)\varrho_N),$$
$$S_N \in B(2\varrho_N \boldsymbol{e}_h; \epsilon\varrho_N)$$

の確率が $N \to \infty$ で 1 に収束する.

# Schematic figure in the sub-ballistic phase




$h = 0$ の時にランダムだった球の中心 $x_N$ と $S_N$ は $h$ 方向にずれている.

# 先行研究からの準備

# 分配関数の漸近挙動:$h = 0$

分配関数 $Z_N^0$ を調べるのが最初のステップ．外力がない場合は,

Theorem (Donsker–Varadhan (1979))

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[e^{-\nu|S_{[0,N]}|}\right] &= \mathbb{P}\otimes\mathbf{P}\left(S_{[0,N]}\cap\mathcal{O}=\emptyset\right)\\
&= \exp\left\{-c_{DV}N^{\frac{d}{d+2}}(1+o(1))\right\},\\
c_{DV} &= \inf_{U\subset\mathbb{R}^d:\ \text{open}}\{\nu|U|+\lambda_1(U)\},\\
\lambda_1(U) &= -\Delta|_U \text{の Dirichlet 最小固有値}.
\end{aligned}
$$

Remark

変分問題 $\inf\{\nu|U|+\lambda_1(U)\}$ の最小はある半径 $\varrho_1(d,\nu)$ の球 $B(x;\varrho_1)$ で達成される．(Faber–Krahn's inequality)

# Donsker–Varadhan の議論

下からの評価は簡単：

$$\mathbf{E}\left[e^{-\nu|S_{[0,N]}|}\right] = \sum_U e^{-\nu|U|}\mathbf{P}(S_{[0,N]} = U)$$
$$\gtrsim \max_U \exp\{-\nu|U| - N\lambda_1(U)\}$$
$$= \exp\left\{-N^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \{\nu|U| + \lambda_1(U)\}\right\}.$$

$(|rU| = r^d|U|,\ \lambda_1(rU) = r^{-2}\lambda_1(U) \Longrightarrow r = N^{\frac{1}{d+2}})$

# Donsker–Varadhan の議論

下からの評価は簡単：

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[e^{-\nu|S_{[0,N]}|}\right] &= \sum_U e^{-\nu|U|}\mathbf{P}(S_{[0,N]} = U) \\ &\gtrsim \max_U \exp\{-\nu|U| - N\lambda_1(U)\} \\ &= \exp\left\{-N^{\frac{d}{d+2}} \inf_U \{\nu|U| + \lambda_1(U)\}\right\}.\end{aligned}$$

$(|rU| = r^d|U|,\ \lambda_1(rU) = r^{-2}\lambda_1(U) \Longrightarrow r = N^{\frac{1}{d+2}})$

上からの評価は $\gtrsim$ を $\approx$ にすれば良いわけで，これは Laplace 原理とみなせる．Donsker–Varadhan はこれを大偏差原理の理論を用いて示した．

この議論は最適戦略「半径 $\varrho_N = \varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}$ の球に滞在する」が他の全ての戦略を圧倒していることを意味している．

# 分配関数から分かること

Donsker–Varadhan の結果から従うのは，厳密には

1. 半径 $\varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}$ の（ほとんど $\mathcal{O}$ を含まない）球が存在して，
2. ランダムウォークはほとんどの時間をそこで過ごす

ということである．とくに冒頭に述べた“完全に含まれる”という結果は<u>導かれない</u>.

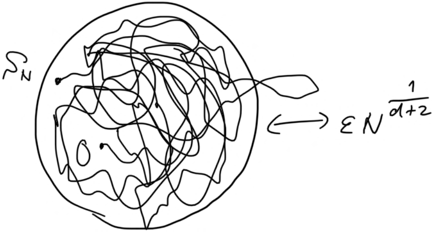
# 分配関数から分かること

Donsker–Varadhan の結果から従うのは，厳密には

1. 半径 $\varrho_1 N^{\frac{1}{d+2}}$ の（ほとんど $\mathcal{O}$ を含まない）球が存在して，
2. ランダムウォークはほとんどの時間をそこで過ごす

ということである．とくに冒頭に述べた “完全に含まれる” という結果は導かれない．

実際 $\epsilon N^{\frac{1}{d+2}}$ だけ外に出る excursion があったとして，$e^{-\nu|S_{[0,N]}|}$ に与える影響は $e^{O(N^{\frac{1}{d+2}})}$ であって，分配関数の誤差項 $e^{o(N^{\frac{d}{d+2}})}$ に埋もれてしまう．



# Sznitman, Povel の局在証明の概要

Sznitman (1991), Povel (1999) による局在の証明は，以下の二つのステップからなる：

1. “障害物の拡大” という粗視化を使って，球の外側は危険であることを示す，
2. 分配関数について，以下の明示的ではないが精密な評価を導く：

$$Z_n^0 \geq N^{-3d}\mathbb{E}\left[\exp\left\{-N\lambda_1\Big((-N,N)^d \setminus \mathcal{O}\Big)\right\}\right].$$

これらを組み合わせることで

$$\mathbb{P}\otimes\mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N, \text{RW exits the ball}) \ll Z_n^0 = \mathbb{P}\otimes\mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > N)$$

を直接示す，という流れである．

# Bolthausen の局在証明の概要

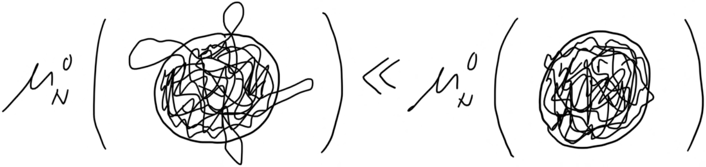
Bolthausen (1994) の議論の方針は全く異なる．まず次を示す：

**Proposition (Ball covering)**

$d = 2$ のとき任意の $\epsilon \in (0,1)$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N^0\big(B(x_N;(1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1.$$

これが分かっていれば，球の外に出る excursion は折り畳んで中に入れることで $e^{-\nu|S_{[0,N]}|}$ を大きく減らすことができる．Entropy loss を評価する必要があるが，ともかく次を示すことができる．



# 相転移点の表現と劣臨界での先行結果

外力に関する相転移の臨界点は，次の量を使って記述される：

$$\beta(x) := -\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\otimes\mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > \tau_{nx}).$$

これは障害物の間を横断するコストであり，$h$ が $\mathbf{e}_1$ に平行なら

$$|h| < \beta(\mathbf{e}_1) \iff \text{sub-ballistic}.$$

# 相転移点の表現と劣臨界での先行結果

外力に関する相転移の臨界点は，次の量を使って記述される：

$$\beta(x) := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P} \otimes \mathbf{P}(\tau_{\mathcal{O}} > \tau_{nx}).$$

これは障害物の間を横断するコストであり，$h$ が $\mathbf{e}_1$ に平行なら

$$|h| < \beta(\mathbf{e}_1) \iff \text{sub-ballistic}.$$

Sznitman (1995) は $\beta$ を導入して上の相転移を示し，さらに

$$\text{sub-ballistic} \implies S_N = o\left(N^{\frac{d}{d+2}}\right)$$

まで到達した．とくに Eisele–Lang (1987) の拡張で，劣臨界相で

$$Z_N^h = \mathbf{E}\left[e^{\langle h, S_N\rangle - \nu |S_{[0,N]}|}\right] = e^{-c_{DV} N^{\frac{d}{d+2}}(1+o(1))}.$$

# 主結果の証明の要点

# 分配関数から分かること

劣臨界相では分配関数は $h = 0$ と同じ振る舞いをすることが分かったので，次が従う：

1. 半径 $\varrho_N$ の（ほとんど $\mathcal{O}$ を含まない）球が存在して,
2. ランダムウォークはほとんどの時間をそこで過ごす.


ここから次の 2 ステップで進む.

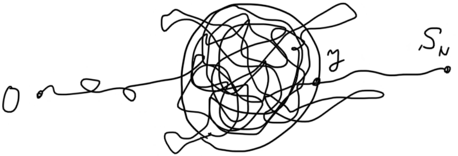
i) First visit から last visit までの間は $B(x; \varrho_N)$ に留まる.
ii) 最初と最後の piece も $B(x; \varrho_N)$ に留まる.

# なぜ 2 ステップに分けるのか？

第 2 ステップの

ii) 最初と最後の piece も $B(x;\varrho_N)$ に留まる．

が重要かつ難しい方である．基本的には劣臨界性から出す：




gain : $\langle \ell, S_N - y \rangle$

cost : $\beta(S_N - y)$ ?

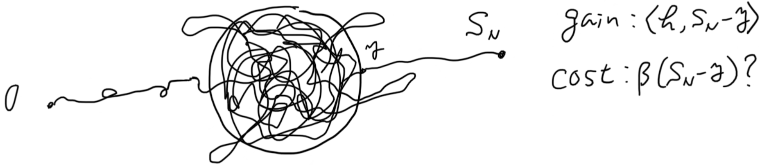
ところが $\beta(\cdot)$ は“平均化された”横断コストであったから，
$B(x;\varrho_N)$ の外側が“平均化された”媒質であることを示さないと，上の描像は正当化されない．

# なぜ2ステップに分けるのか？

第2ステップの

ii) 最初と最後の piece も $B(x;\varrho_N)$ に留まる.

が重要かつ難しい方である．基本的には劣臨界性から出す：




ところが $\beta(\cdot)$ は“平均化された”横断コストであったから，$B(x;\varrho_N)$ の外側が“平均化された”媒質であることを示さないと，上の描像は正当化されない.

このために第1ステップ

i) First visit から last visit までの間は $B(x;\varrho_N)$ に留まる.

が必要なのである.

# Key lemma: ball covering

**Theorem (Ball covering: Ding–F.–Sun–Xu (2018))**

$d \geq 2$ とし $\varrho_N$ と $x_N$ は confinement property のものとする．このとき全ての $\epsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N^0\big(B(x_N;(1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[0,N]}\big) = 1.$$

**Remark**

これは Bolthausen の 1994 年の予想が正しいことを示す．最近 Berestycki–Cerf も上の結果を我々とは違う方法で示すことに成功したようである (arXiv:1811.04700).

# Key lemma: ball covering

**Lemma (Ball covering: Ding–F.–Sun–Xu (2019))**

$d \geq 2$ とし $B(x_N; \varrho_N)$ は分配関数の漸近挙動から存在が保証されたものとする．このとき全ての $\epsilon > 0$ に対し

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N^h \Big( B(x_N; (1-\epsilon)\varrho_N) \subset S_{[\tau_B, \tau_B^{\leftarrow}]} \Big) = 1.$$

**Remark**

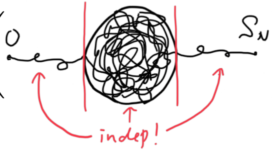
この Lemma の証明は $h = 0$ の場合の結果と全く同じである．
その理由は $h = 0$ の場合の議論が本質的に組み合わせ論的であり，
外力の存在に影響される道具を使っていないからである．

# 主結果の証明の要約

分配関数の挙動からランダムウォークはほとんどの時間をある $B(x;\varrho_N)$ で過ごすことを思い出す：

$\mu_N^h\Bigg($ 

$\Bigg)$

$\ll \mu_N^h\Bigg($ 

$\Bigg)$ (Bolthausen の議論)

$\ll \mu_N^h\Bigg($ 

$\Bigg)$ (劣臨界性).

$x_N$ と $S_N$ の位置は，半径 $\varrho_N$ の球への局在という制約のもとで $\langle h, S_N\rangle$ を最大化するものとして決まる.