5.6　平均値の定理を避ける理由

実は微積分学の基本定理 (2) の証明は，平均値の定理を使えば (1) に帰着させることができて簡単になります．また，例 5.5.1 で指摘した問題を，平均値の定理を使って解決する方法もあり，そうすれば本書の方針でもかなり易しくなります．しかし本書ではあえてそれを避けて，かなり面倒な議論をしました．その理由を釈明しておきます．平均値の定理は，実数に特有の「大小関係」に強く依存しており，関数がベクトル値になると一般には成立しません．ところが 4.4 節で触れたように，微積分学の応用ではベクトル値の関数を考えることはほとんど必須ですから，ベクトル値でも変わらずに通用する方法で証明するのが良いと思います[†3]．本書でも，第 9 章で曲線の長さを考察するときには，一変数でベクトル値の関数を対象にします．

前の節で行った微積分学の基本定理の証明は，関数の値の絶対値を全てベクトルの大きさに置き換えれば，ベクトル値関数に対してもそのまま通用するようになっています．従って，その応用としてこの後に示すいろいろな結果も，結果自体が関数の大小関係に関するものでない限り，そのまま成立します．

また平均値の定理の証明も一度は見ておいて欲しいのですが，易しい議論ではありません．そうすると，微積分学の基本定理の証明が平均値の定理を使えば短くなるのは，難しいところをそこに押し込めただけ，という感じもします．微分と積分が互いに逆演算であるという，微積分学で最も重要な定理の証明の技術的な核心が他の定理の証明の中に隠されているのは，あまり好ましいこととは思われません．そういうわけで，本書では微積分学の基本定理の証明は，どうしてそれが成り立つのかが証明の中に明確に現れ，さらにベクトル値関数に対してもそのまま通用する方法にこだわることにしました．

[†3] 平均値の定理を使う証明でも，有限次元ならベクトル値関数を成分毎に分けて考えるという方法で証明はできるので，不可避な問題が生じるわけではありませんが．