1.5 積分の新しい定義に向けて

前節のように積分の定義を考え直すと良いことがあるのですが，それは「連続関数の積分の存在」と「連続関数の積分は微分の逆演算」という二つの定理に支えられています．従ってそれらは微積分学の理論において最も重要と言ってよい二つの定理であり，本書の前半（第 5 章まで）はその証明を目標とします（後半はそれを使って得られる有用な定理の紹介や，その運用にあてます）．

そのためには「実数」「極限」「関数」といった基本的な概念を見直すことを避けて通れないのですが，これを退屈に感じる人が多いので，少し予告的な説明をしておきます．楕円の周の長さを求めようとしたときに出てきた積分

$$\int_0^b \sqrt{\frac{1+12x^2}{1-4x^2}}\mathrm{d}x$$

は，新しい定義では問題なく存在すると言いましたが，一方でよく知っている関数では表せないのでした．表し方を知らないものが存在することなど，どうやって証明できるというのでしょう？高校までの数学では，こういう状況には向き合ってこなかったと思います[†4]．

積分の新しい定義は区分求積法 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})\frac{1}{n}$ の類似で与えられると予告しました．そうすると積分の存在を証明するためには，このように「あらかじめ値のわからないような極限」の存在を保証する手段が必要です．それが次の第 2 章の目標である「実数の連続性」です．

また物体の運動の例で出てきた $\int_0^T v(t)\mathrm{d}t$ における速度 $v(t)$ は，典型的にはそれ自体が加速度の積分で定まるものです．従って，区分求積法の極限として定義された得体の知れない関数をもう一度積分するような操作も考える必要があります．このためには関数の概念をよく知っている具体例から離れたものに拡大して，その中で連続性などの定義を考え直す必要があります．とくに積分の定義に適した連続性は，高校の数学で学んだものと少し違っていて，それが第 3 章の目標である「一様連続性の概念」です．

[†4] 積分以外でも似た状況はあります．例えば円周率 π や Napier 数 e についても，何らかの性質を満たす数として導入され，「表し方」の議論はしていませんが，存在することは証明せずに仮定されています．本書では e が（実数として）存在することは 2.5 節で，π については 9.3 節で，それぞれ証明を与えます．