付録 E

惑星の軌道：巨人の肩の上に立つ

これは，編集の過程で割愛することになった，最後の章です．本書で学んだことを使って，太陽の重力に引かれて運動する惑星が楕円軌道（または放物線か双曲線）を描くことを証明しましょう．これは Leibnitz と並んで微積分学の創始者と言われる Newton（ニュートン）が微積分法の応用として示したもので，そういう意味では最も由緒正しい応用の一つと言えます．技術的には大変な証明になりますが，それだけにこれまでに学んだことで何ができるようになったかの総決算としては良いと思います．

3 次元空間での運動なので $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ と三つの座標で軌道が表されます．質量や万有引力定数などは見やすさのために 1 とし，太陽は座標の原点にあるとしましょう．すると惑星が受ける力は距離の二乗に反比例する大きさで常に原点の方を向いているので，微分方程式は

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = -\frac{(x_1(t), x_2(t), x_3(t))}{\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2 + x_3(t)^2}^3}$$

となります．これは二階微分を含む方程式で，大雑把にいうと二回積分して解くことになります[†1]．積分するたびに初期値を決める必要があるので，初速度と初期位置を与えます．

さて，ここで直交座標をうまく設定すると少し問題が簡単になります．初期位置の方向に x_1 軸を取り，x_2 はそれと初速度 $\boldsymbol{v}(0)$ を含む平面にとります．すると初速度も加速度もこの平面内にあるので，この平面に垂直な x_3 成分はずっと 0 のままであることがわかります．従って平面上の軌道が満たす以下の方程式を考えるこ

[†1] もちろん右辺に未知関数があるので，直接積分できるわけではありませんが．

とになります：

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_1(t), x_2(t)) = -\frac{(x_1(t), x_2(t))}{\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}^3}.$$

E.1　Kepler の第二法則

微分方程式を満たす軌道について，まず次の Kepler の第二法則を確かめましょう．第二法則というものの，発見は第一法則より前だったようです．

定理 E.1.1 (Kepler の第二法則)**.** 惑星と太陽を結ぶ線分が描く面積の微分（面積速度）は一定である．

これは線分が時刻 t までに描く面積を $S(t)$ とすると，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t)$ が一定であるということです．時刻 t から $t + \Delta t$ までに描かれる面積は，図 E.1 において $0, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t + \Delta t)$ が作る（ほぼ）三角形に囲まれる部分です．

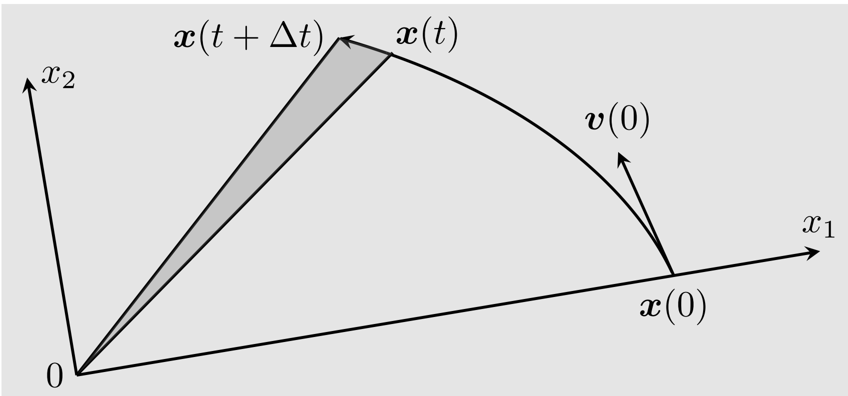

図 E.1　濃い影をつけた部分が，軌道の動径が t から $t + \Delta t$ までに通過する領域．変位 $\boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t)$ はほぼ $\boldsymbol{x}'(t)\Delta t$ である．

二つのベクトルが作る三角形の面積は知っていると思います．

確認問題 E.1.2. 図 E.1 において $0, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t + \Delta t)$ が作る三角形の面積は $\frac{1}{2}(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t))\Delta t$ で近似できることを示せ．

この問題の結果から $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = \frac{1}{2}(x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t))$ となるので，これが定数であるためにはもう一度微分した

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}S(t) = \frac{1}{2}(x_1(t)x_2''(t) - x_1''(t)x_2(t))$$

が 0 であることを示せばよいことになります．

ここで運動方程式を思い出すと $(x_1''(t), x_2''(t))$ と $(x_1(t), x_2(t))$ は平行だったので，$(x_2''(t), -x_1''(t)) \perp (x_1(t), x_2(t))$ であり，この二つのベクトルの内積の $\frac{1}{2}$ である $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}S(t) = 0$ となって，Kepler の第二法則が証明できました．

E.2　Kepler の第一法則

軌道の形を計算するために $x_1(t) = r(t)\cos\theta(t)$, $x_2(t) = r(t)\sin\theta(t)$ と極座標に変換します[†2]．このときちょっと面倒な微分の計算を実行すれば，面積速度が

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(t) = \frac{1}{2}r(t)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)$$

と表せることがわかります．これは一定であること，つまり初期値

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}S(0) = \frac{1}{2}(x_1(0)x_2'(0) - x_1'(0)x_2(0))$$

と等しいことを証明したので，常に $r(t)^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) = x_1(0)v_2(0)$ であることがわかります．この初期値を L と呼ぶことにします．図 E.1 では $x_1(0) > 0, v_2(0) > 0$ になっているので，以下では $L > 0$ とします．この最後の式は，力学で「角運動量保存の法則」と呼ばれているものです．

重力だけがはたらく運動では，運動エネルギーと位置エネルギーの和が保存されるので，初期エネルギーを E とすると

$$\frac{1}{2}(x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2) - \frac{1}{\sqrt{x_1(t)^2 + x_2(t)^2}} = E \tag{E.1}$$

です．

確認問題 E.2.1. 上の式 (E.1) の左辺を t で微分して運動方程式を使うことで，エネルギー保存が成り立つことを確かめよ．

これも極座標に変換すると，以下のように書き直せます：

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\right)^2 + r(t)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)\right)^2 = 2\left(E + \frac{1}{r(t)}\right).$$

[†2] やや唐突ですが，ここで紹介しているのは歴史の中で洗練された方法なので，とりあえず結果を楽しんでください．

ここまでで二つの保存則

$$r(t)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t) = L, \tag{E.2}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)\right)^2 + r(t)^2 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)\right)^2 = 2E + \frac{2}{r(t)}$$

を示しました．上の式を $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)$ について解いて下の式に代入し，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ について解けば，微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) = \pm\sqrt{2E + \frac{2}{r(t)} - \frac{L^2}{r(t)^2}} \tag{E.3}$$

を得ます．この $\pm$ は実は途中で入れ替わるのですが，とりあえずは $t = 0$ では図 E.1 で $\boldsymbol{v}(0)$ が x_2 軸側に傾いているので，負の方をとることにします．$r(t)$ は二階微分可能と仮定しているので $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ は連続であり，従って中間値の定理により入れ替わるのは右辺が 0 になったときだけです．

次に軌道の形を知るには r と θ の関係を見た方がわかりやすいので，もう一度変数変換をします．まず角運動量保存の式から $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta$ の符号は L と常に同じなので，$\theta(t)$ は単調増加であることがわかります．とくに t と θ の対応は一対一であり，従って $t \mapsto r(t)$ の対応を次のように二段階に分けることができます：

$$t \longmapsto \theta(t) \longmapsto R(\theta(t)) = r(t).$$

言い換えると新しい関数 R を $R(s) = r(\theta^{-1}(s))$ によって定めるということです．この R は動径の長さを角度の関数として表したものです[†3]．ここで (E.2) によって θ に逆関数の微分定理を使うことができるので，$R = r \circ \theta^{-1}$ も微分可能です．そして連鎖律によって $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) = R'(\theta(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(t)$ ですから，角運動量保存則を使うと

$$R'(\theta(t)) = \frac{r(t)^2}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t) = \frac{R(\theta(t))^2}{L}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$$

です．ここで $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r(t)$ に前に求めた (E.3) の $\pm$ の $-$ の方を取ったものを代入して $r(t) = R(\theta(t))$ と書き直し，少し整理すると

$$\frac{R'(\theta(t))}{R(\theta(t))^2} = -\sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{2}{L^2 R(\theta(t))} - \frac{1}{R(\theta(t))^2}}$$

[†3] この R のことを，t の関数と同じ記号 r で書く本がありますが，これは記号の濫用でありときどき深刻な誤解を生みます．この種の変数変換で混乱したら，記号の濫用のせいかも知れないと疑ってみましょう．

となります．従って $\theta(t)$ が値としてとり得る全ての s に対して

$$\frac{R'(s)}{R(s)^2} = -\sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{2}{L^2 R(s)} - \frac{1}{R(s)^2}} \tag{E.4}$$

という微分方程式が得られます．

この微分方程式は見かけは複雑ですが，解くことができます．実際，右辺が 1 になるように整理して両辺を 0 から θ まで積分すれば

$$\int_0^\theta \left(\sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{2}{L^2 R(s)} - \frac{1}{R(s)^2}}\right)^{-1} \frac{-R'(s)}{R(s)^2} \mathrm{d}s = \theta \tag{E.5}$$

ですが，左辺において

$$\frac{-R'(s)}{R(s)^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{R(s)}$$

であることに注意すると，$u(s) = 1/R(s)$ とおいて置換積分が使える形になっていて，(E.5) の左辺は

$$\int_{1/R(0)}^{1/R(\theta)} \left(\sqrt{\frac{2E}{L^2} + \frac{2u}{L^2} - u^2}\right)^{-1} \mathrm{d}u$$

と書き換えられます．さらに平方根の中を u について平方完成すれば

$$\int_{1/R(0)}^{1/R(\theta)} \left(\sqrt{\frac{2EL^2+1}{L^4} - \left(u - \frac{1}{L^2}\right)^2}\right)^{-1} \mathrm{d}u$$

となります．この積分は例 D.2.1 と同じように

$$\cos v(u) = \frac{L^2}{\sqrt{2EL^2+1}}\left(u - \frac{1}{L^2}\right)$$

によって u から v に変数を変換し，置換積分公式を使って計算すれば，

$$\arccos\left[\frac{L^2}{\sqrt{2EL^2+1}}\left(\frac{1}{R(\theta)} - \frac{1}{L^2}\right)\right] - \theta_0$$

となります（ただし θ_0 は第一項の $R(\theta)$ を $R(0)$ として得られる定数です）．式 (E.5) によると，これが θ に等しいということだったので，

$$R(\theta) = \frac{L^2}{1 + \sqrt{2EL^2+1}\cos(\theta + \theta_0)} \tag{E.6}$$

が従います．

ここまでは (E.3) の右辺が負と仮定して進めてきましたが，正になった場合も符号だけ変えて同じように解けば (E.6) がそのまま成り立つことがわかります．もし二次曲線（円錐曲線ともいう）の極座標表示を知っていれば，(E.6) から

$$E \begin{cases} < 0 & \Rightarrow \quad \text{楕円}, \\ = 0 & \Rightarrow \quad \text{放物線}, \\ > 0 & \Rightarrow \quad \text{双曲線} \end{cases}$$

がすぐにわかるのですが，一応確認してみましょう．最初に θ_0 のズレを解消するために図 E.2 のように座標を取り替えて

$$z_1 = R(\theta)\cos(\theta+\theta_0), \quad z_2 = R(\theta)\sin(\theta+\theta_0)$$

とします．次に前の (E.6) を変形した $R(\theta) = L^2 - \sqrt{2EL^2+1}R(\theta)\cos(\theta+\theta_0)$

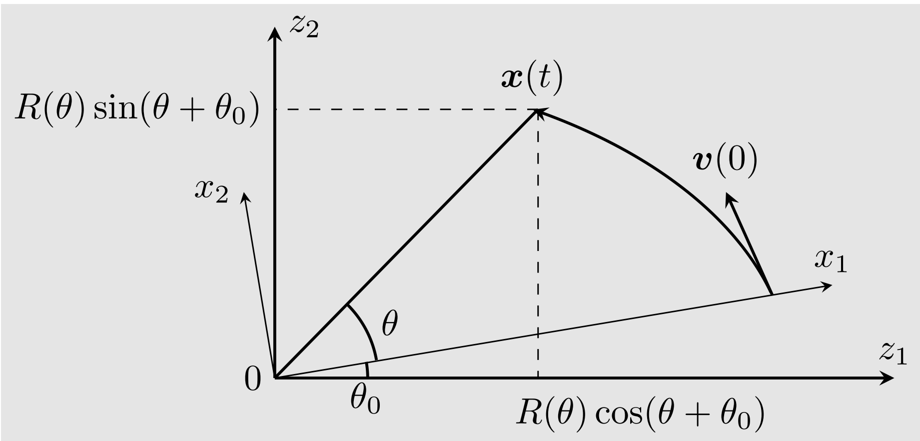

図 E.2　θ_0 を吸収するために座標を x_1, x_2 から z_1, z_2 に変換することを表した図.

の両辺を二乗して整理すれば，以下の二次曲線の式になります：

$$\begin{aligned} 2E^2\left(z_1 + \frac{L^2\sqrt{2EL^2+1}}{2E}\right)^2 - \frac{2E}{L^2}z_2^2 = 1, \quad (E \neq 0), \\ L^4 - 2L^2 z_1 = z_2^2, \quad (E = 0). \end{aligned} \tag{E.7}$$

これで解決のように見えますが，今までの議論でわかったのは $R(\theta)$ が θ の関数としてどう振る舞うかということで，それは軌道の形だけの情報です．惑星がその軌道をどのように辿っているかは，まだわかっていません．例えば軌道が楕円の場合に，その一部だけを動くのか，全体を動くのかも不明です．それを知るためは時間 t の関数として $\theta(t)$ がどう振る舞うかも知る必要があり，それについて少し考えてみます．

楕円の場合　この場合は $r(t)$ が有界なので，角運動量保存則 $r(t)^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(t) = L > 0$ から，$\theta(t)$ は常に一定以上の速度を持っていることがわかります．これは $(x_1(t), x_2(t))$ が (E.7) の楕円を反時計回りに回り続けることを意味します．

放物線の場合　この場合は $\cos(\theta + \theta_0) = -1$ のとき，(E.6) の分母が 0 になります．しかし (E.7) の $E = 0$ の場合の式を見ると，それが起きる（$z_1 < 0$ で $z_2 = 0$ となる）ことはないことがわかります．従ってこの場合も $\theta(t)$ は単調増加で，$(x_1(t), x_2(t))$ は放物線を反時計回りに辿ります．さらに面積速度一定の法則から，放物線上のどこかの点に収束するということもなく，$t \to \infty$ で無限遠に飛び去ることもわかります．

双曲線の場合　この場合は

$$\cos(\theta + \theta_0) = -\frac{1}{\sqrt{2EL^2 + 1}}$$

のとき，(E.6) の分母が 0 になります．とりあえず $t = 0$ では $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(t) > 0$ と仮定していたので，そうなる θ の中で，θ_0 より大きい最小のものを θ_∞ とします．するとこれは双曲線の一つの漸近線の方向であることがわかります．後は放物線の場合と同様に，面積速度一定の法則から，$(x_1(t), x_2(t))$ はその漸近線に沿った方向で無限遠に飛び去ることがわかります．

惑星の運動の場合は，放物線や双曲線の場合のように無限遠に飛び去ることはないので，その軌道は楕円であるということになります．さらに (E.7) から $(z_1, z_2) = (0, 0)$ が一つの焦点であることもわかるので，次の法則が証明できました[†4]．

定理 E.2.2 (Kepler の第一法則)**.** 太陽の惑星は，太陽を焦点の一つとする楕円軌道を描く．

なお，双曲線軌道になるのは遠方から飛来してそのまま飛び去っていく非周期彗星などです．放物線軌道は $E = 0$ という特異な条件に対応するので，通常は観測されません．

[†4] 焦点は二次曲線の極座標表示の一般論を知っていれば，(E.6) からもすぐにわかります．

E.3 Kepler の第三法則

最後に惑星の回転周期に関する以下の法則を証明します：

定理 E.3.1 (Kepler の第三法則)**.** 太陽の惑星の公転周期の二乗は楕円の長径の三乗に比例する.

軌道を求めるときに時間変数 t を消してしまったので，一瞬どうしていいか分からなくなりますが，実は面積速度一定の法則から簡単にわかります．まず楕円の z_1, z_2 による方程式 (E.7) から

$$\text{長径} = \frac{1}{\sqrt{2}|E|}, \quad \text{短径} = \frac{L}{\sqrt{2|E|}}$$

ですから，楕円の面積 $S = \pi L/(2|E|^{3/2})$ です．ここで面積速度が一定の値 $\frac{1}{2}L$ だったことを思い出せば，一周するのにかかる時間（＝公転周期）は

$$\frac{S}{\frac{1}{2}L} = \frac{\pi}{|E|^{3/2}}$$

となって，確かに Kepler の第三法則が成り立ちます.