付録 D

割愛した節

編集の過程で割愛することになった節を集めたものです．本来の場所から移動していたり，本文は割愛に伴って修正したりしているので，不整合なところもありますが，参考のために置いておきます．節の題目の後に，割愛前の位置を書いておきます．

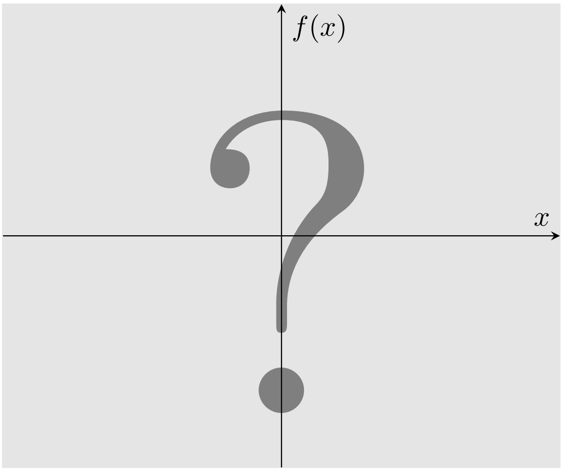
D.1　関数と聞いて何を想像する？（3.5 節）

第 3 章で扱ったような関数の考え方にに馴染むためと，それから先の理論の展開で「何を心配しているか」を理解する助けになる，一つの考え方を紹介しておきます．高校の数学では単純な式で書ける，グラフが滑らかな関数を相手にすることが多いので，例えば「連続関数」という単語を見たら二次関数や三角関数を想像する人が多いと思います．しかしこれらの関数は性質が良すぎて，一般の連続関数に対して成り立つ定理の意味を理解するのには適当ではありません．「連続関数」と言ったら，それ以上には何も追加の良い性質を持っていないものを想像する方が，定理の意味などは理解しやすくなります．そこで，ここでは筆者が「一般の関数」，「連続関数」，「微分可能な関数」，「滑らかな関数」（定義は何回でも微分できる関数）と聞いて想像するものを図にしておきます．

まず図 D.1 の左は一般の関数ですが，これは何も想像できないという意味です．一般の関数と言ったら，どんな良い性質も持っていないものを考えなくてはいけませんが，それは難しいので安易にイメージなど持たないように心がけています[†1]．図 D.1 の右は連続関数です．一点でも微分可能な点があったりすると，それは余計

[†1] 例えば例 3.1.5 の関数はすべての点で不連続ですが，それでも有界であったり有限小数で表せる点の上では定数であるという良い性質を持っています．一般の関数と言ったら少なくとも「全ての（一点ではない）区間で上下に非有界」くらいは必要です．

な性質を持っていることになってしまうので，少なくともこの図の程度には性質の悪いものをイメージします．



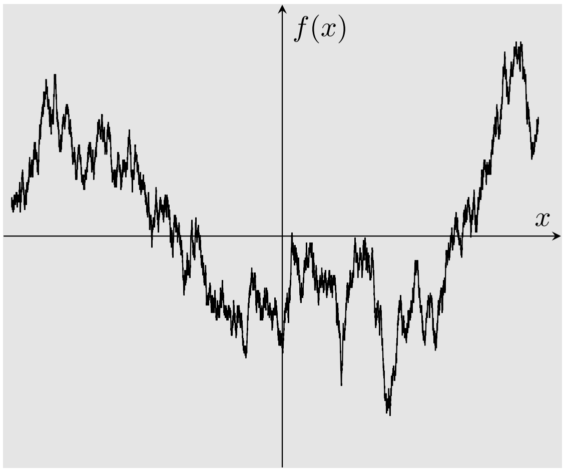
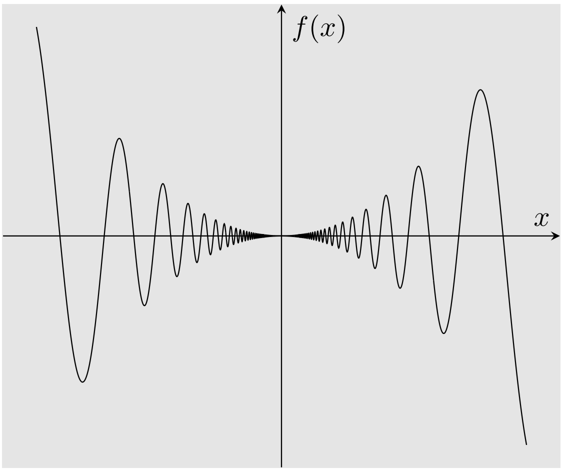


図 D.1　左：一般の関数，右：連続関数



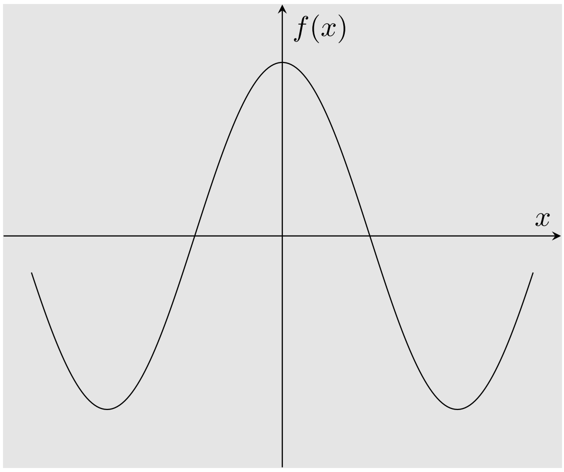


図 D.2　左：微分可能な関数，右：滑らかな関数.

次に図 D.2 は，微分可能性まで含めたときの図です．左は微分可能な関数 $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ のグラフで，これは $x = 0$ での値を $f(0) = 0$ と定めると微分可能になるのですが，導関数は $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ で，$x = 0$ で連続になっていません．導関数が連続というのは余計な性質なので，そうなっていないものを想像するわけです．導関数が不連続な点はもっとたくさんあっても良いのですが，グラフを描くのが大変なので図はこの程度にしておきます．右は何回でも微分できる関数のグラフで，このとき関数は「滑らか」であると言います．

D.2　積分計算の技法（7.6 節）

前の章の 6.3 節で置換積分と部分積分の公式を証明しました．高校の数学でも，これらが多くの具体的な積分を求めるのに使えることを学んだと思います．この節では，新しく導入した逆三角関数が役に立つ場合や，微積分の他の本であまり触れられない双曲線関数というものを使う方法を紹介します．

例 D.2.1. $a>0$ と $x\in(0,a)$ に対して，

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\,\mathrm{d}y$$

を考えてみましょう．これは $x=a$ のときは高校の数学でも扱う積分ですが，上端が一般の x になると答えを書くのに逆三角関数が必要になります．実際 $y(\theta)=a\sin\theta$ と置くと

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}(\theta)=a\cos\theta=\sqrt{a^2-y(\theta)^2}$$

ですが，θ が 0 から $\arcsin\frac{x}{a}$ まで動くとき $y(\theta)$ は 0 から x まで動くので，置換積分公式 (6.5) を使って

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}\,\mathrm{d}y&=\int_0^{\arcsin {x}/{a}} \frac{1}{\sqrt{a^2-y(\theta)^2}}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}(\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\arcsin {x}/{a}}\mathrm{d}\theta\\&=\arcsin\frac{x}{a}\end{aligned}$$

となります． □

三角関数の積分は $\tan\frac{y}{2}=u(y)$ と置くとうまくいく場合があります．この置換がよくできているのは，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}(y)&=\frac{1}{2\cos^2\frac{y}{2}}=\frac{1+\tan^2\frac{y}{2}}{2}=\frac{1+u^2}{2},\\ \sin y&=2\sin\frac{y}{2}\cos\frac{y}{2}=\frac{2u}{1+u^2}\\ \cos y&=2\cos^2\frac{y}{2}-1=\frac{1-u^2}{1+u^2}\end{aligned}$$

と全てがきれいに有理式になることです．従って三角関数の有理式（多項式の分数）の積分は，いつでも有理式の積分に書き換えられます．ただし有理式の積分がいつでも簡単とは限らないことには注意が必要です．

例 D.2.2. $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ に対して，

$$\int_0^x \frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y$$

を考えてみましょう．$\tan\frac{y}{2} = u(y)$ の置換により，問題の積分は

$$\int_0^x \frac{1}{\cos y}\mathrm{d}y = \int_0^{\tan x/2} \left(\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}(y)\right)^{-1}\mathrm{d}u = \int_0^{\tan x/2} \frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u.$$

と書き換えられます．この右辺は部分分数分解をすれば

$$\begin{aligned}\int_0^{\tan x/2} \frac{2}{1-u^2}\mathrm{d}u &= \int_0^{\tan x/2} \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\mathrm{d}u \\ &= \log\left(\frac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}\right)\end{aligned}$$

と計算できます．なお，ここで紹介した置換は唯一の方法ではありません．この例の積分なら $\sin y = u(y)$ と置いてもできるので，興味があれば試してください．　□

次の置換積分の技法を紹介するために，以下のように関数に名前をつけておきます：

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

これらは双曲線関数（正弦/余弦/正接）と呼ばれていて，いろいろな点で三角関数と似ています．7.4 節で Taylor の公式の応用として紹介した Euler の式 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$（$i$ は虚数単位）を使うと

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}}$$

と書けるので，類似が見てとれるでしょう．置換積分でも似た役割を果たしますが，その際に次の関係が少し違っていることが重要です：

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1. \tag{D.1}$$

また sinh は単調増加で，逆関数も求められます：

確認問題 D.2.3. $\sinh^{-1} x = \log(x+\sqrt{x^2+1})$ を示せ．（ヒント：$\sinh y = x$ の両辺に e^y をかけると e^y の二次方程式になる．）

三角関数は $\sqrt{a^2-x^2}$ という関数を含む積分に有効でした．一方で双曲線関数は (D.1) から想像されるように，$\sqrt{x^2+a^2}$ という形の関数を含む積分に有効です．

例 D.2.4. $a>0$ と $x>0$ に対して，

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}}\,\mathrm{d}y$$

を考えてみましょう．$y(u)=a\sinh u$ という置換を考えると，$y^2+a^2=a^2\cosh^2 u$ であり，また $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=a\cosh u$ なので

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{y^2+a^2}}\mathrm{d}y &= \int_0^{\sinh^{-1} x/a} \frac{a\cosh u}{a\cosh u}\mathrm{d}u\\ &= \sinh^{-1}\frac{x}{a}\\ &= \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)-\log a\end{aligned}$$

と計算できます．この置換も唯一の方法ではなく，$u(y)=y+\sqrt{y^2+a^2}$ と置いてもできるので，興味があれば試してください．　□

ここからは少し部分積分も交えた例を見てみます．

例 D.2.5. $a>0$ と $x\in(0,a)$ に対して，

$$\int_0^x \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y$$

を考えてみましょう．これは三角関数を使った置換積分でも求められますが，$y'=1$ があると思って

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y &= \int_0^x y'\sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y\\ &= x\sqrt{a^2-x^2}+\int_0^x \frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\end{aligned}$$

とします．ここで一旦途方にくれますが，$y^2=a^2-(a^2-y^2)$ と書き直すと右辺

に元の積分と例 D.2.1 で計算した積分が出てくるので，

$$\begin{aligned}\int_0^x \sqrt{a^2-y^2}\,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+\int_0^x \frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\arcsin\frac{x}{a}\right)\end{aligned}$$

という結果が得られます． □

確認問題 D.2.6. $a>0$ と $x>0$ に対して，$\int_0^x \sqrt{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y$ を求めよ．（ヒント：上の例と同じように部分積分公式を使うか，$u(y)=a\sinh y$ とおいて置換積分公式を使う．）

ここで紹介したものの他にも，積分の計算技法は数多くあります．ただしいくつかの理由で，本書ではこれ以上詳しく述べることはしませんので，適当な微積分の教科書や演習書を参照してください．第一の理由として，本書では微積分学の理論的な側面に重点を置いていて，その視点からは振り子の周期や楕円の長さのように具体的には計算できない積分の方に重要性があります．そちらを強調したいのに，計算できる例を系統立てて詳細に述べると，ややちぐはぐな印象になります．第二の理由として，最近のソフトウェアの進歩によって，結果が初等関数で表せるような積分の計算は，コンピュータで高速かつ正確に行うことができるようになったことがあります．これにより，以前よりそのような計算に習熟する必要性は薄れていると思います[†2]．積分計算を含む科学技術計算を，どれくらいコンピュータに任せることができるようになったのかを知りたければ，とりあえずは Wolfram 社が無償で公開している

`https://www.wolframalpha.com/`

を覗いてみるのが良いと思います．ウェブサイト自体がマニュアルのようになっているので，プログラミングなどに慣れていない人でもすぐに使ってみることができます．

[†2] 意味がなくなった，とまでは思いません．趣味的に学ぶのは楽しいものですし，定番の手法については意味を考えたりすると，初等関数の理解が深まることはあります．また研究のレベルでは，どういう積分が計算可能かが素早くわかることは，確かに役に立つことがあります．

D.3　置換積分と微分方程式：$f(v)\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$ の積分（7.7 節）

置換積分は，具体的な積分の計算だけでなく物理において頻繁に使われる「微分方程式」を解くのにも使えるので，簡単な場合を紹介しておきます．まず微分方程式とは，振り子の振れ角の例でも出てきた

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(t) = \sqrt{2g\sin\theta(t)}$$

のように，ある関数の微分が満たす方程式です．もし右辺が t だけの関数なら，それを積分したものは微積分学の基本定理 (1) により方程式の解になります．しかし上のように右辺にも未知関数 $\theta(t)$ が含まれる場合には，直接積分するというわけにはいかず，工夫が必要になります．

空気中を落下する質量が 1 の物体の微分方程式を考えてみましょう．物体の速度が小さいときには空気抵抗はおおむね速度に比例することが知られていて，その比例定数を $\kappa > 0$ とすると運動方程式は

$$v(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = g - \kappa v(t)$$

となります．とりあえず常識的に空気抵抗が重力を超えることはないと考えて，両辺を $g - \kappa v(t) > 0$ で割ってみると方程式は

$$\frac{1}{g - \kappa v(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = 1$$

となります．この方程式の両辺を t について 0 から T まで積分すると

$$\int_0^T \frac{1}{g - \kappa v(t)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t)\mathrm{d}t = T$$

ですが，ここで置換積分公式と微積分学の基本定理を用いると左辺は

$$\int_0^{v(T)} \frac{1}{g - \kappa v}\mathrm{d}v = -\frac{1}{\kappa}\left(\log(g - \kappa v(T)) - \log g\right)$$

と計算できます．これが T と等しいとして式を整理すると

$$v(T) = \frac{g}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa T}\right)$$

という解が得られます．この解は初めにおいた仮定 $g - \kappa v(T) > 0$ を全ての時間 T で確かに満たしています．この仮定を満たさない解があるかという問題は残りま

すが，それは微分方程式の理論の中で解決されることなので，本書ではこれ以上追究しません．

ところで上の微分方程式を解くときに，$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = g - \kappa v(t)$ の $\mathrm{d}t$ を形式的に "移項" して

$$\frac{1}{g - \kappa v}\mathrm{d}v = \mathrm{d}t$$

としてから両辺を積分する，と説明されることがあります．この変形は正しい結果を導きますが，両辺に現れた $\mathrm{d}v$ や $\mathrm{d}t$ に直接には意味がつけられていないことに注意してください．また両辺をどこからどこまで積分するかは，やや混乱しやすいので注意が必要です．左辺を $v = 0$ から $v = T$ まで積分する誤りを頻繁に見かけます．自信がなくなったら，ここでやったように置換積分を使って全ての段階に意味がつくように進めるのが安全です．

少しだけ設定を変えた問題を確認のために提示しておきます．

確認問題 D.3.1. 物体の速度が大きいときには速度の二乗に比例する空気抵抗を受ける場合がある．このとき物体の速度がみたす微分方程式を導き，初期値 $v(0) = 0$ に対する解を求めよ．（ヒント：積分の計算では部分分数分解を使う．）

D.4　連続関数が Riemann 積分可能であることの別証明（9.5 節の末尾）

定理 9.5.1 の証明を見直すことで，「有界閉区間上の連続関数は Riemann 積分可能」という定理の「有界な単調列は収束する」という事実を用いた別証明が得られるので，その方針を説明します．まず内側からの近似と外側からの近似として使った

$$\sum_{1 \le k \le 2^n} l_{k,n} \frac{1}{2^n}, \qquad \sum_{1 \le k \le 2^n} u_{k,n} \frac{1}{2^n}$$

はそれぞれ単調増加，単調減少になっていることが，図 9.4 と同様の考察でわかります．また f が有界なら，これらの数列が有界であることも容易にわかります．従って定理 2.4.1 により，$n \to \infty$ においてこれらの数列は収束します．さらに f が一様連続であることを使うと，

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \le k \le 2^n} \left| f(\overline{\xi}_{k,n}) - f(\underline{\xi}_{k,n}) \right| = 0$$

がわかります．これと (9.9) によって，

$$\lim_{n\to\infty}\max_{1\le k\le 2^n}(u_{k,n}-l_{k,n})=0$$

が得られるので，上で収束を保証した二つの数列の差は $n\to\infty$ において

$$\sum_{1\le k\le 2^n}u_{k,n}\frac{1}{2^n}-\sum_{1\le k\le 2^n}l_{k,n}\frac{1}{2^n}\le\max_{1\le k\le 2^n}(u_{k,n}-l_{k,n})\sum_{1\le k\le 2^n}\frac{1}{2^n}$$
$$\to 0$$

と消えています．ここで $l_{k,n}\le f(\underline{\xi}_{k,n})\le u_{k,n}$ であることに注意すれば，はさみうちの原理により，$[0,1]$ を 2^n 等分して $\underline{\xi}_{k,n}$ を代表点に取った Riemann 和が収束することがわかります．別の分割や代表点を取った Riemann 和との差が 0 に収束することの証明は，命題 4.3.2 の証明の Step 2 と同じです．

この証明は，2^n 等分という n を増やすごとに分点が増えていく特別な分割の性質を使って「細分すればより精密な面積の近似ができる」という直感に沿って進むので，Cauchy 列による極限の存在よりは受け入れやすいという人もいると思います．はさみうちの原理を使うために $l_{k,n},u_{k,n}$ を使うところがかなり技巧的ですが，これは有界閉区間上の連続関数に対する「最大値・最小値の存在定理」という難しい定理を先に示しておくと不要になり，それが標準的な証明です．

D.5　指数関数の微分再訪（C.3 節）

指数関数の微分を議論したときに，先に逆関数である対数関数の微分を求めました．指数関数・対数関数の導入の順序と逆になっているのが気になる人もいると思いますが，それはそうすると証明が簡単になるからです．ここではそれを理解するためにも，指数関数の微分公式を (7.3) から直接導いてみます．まず $h\neq 0$ に対して，(7.3) と $x\mapsto x^h$ が連続であることを使うと

$$\left(1+\frac{h}{n}\right)^n=\left(\left(1+\frac{h}{n}\right)^{n/h}\right)^h$$
$$\to e^h,\quad n\to\infty \tag{D.2}$$

です．この左辺に二項定理を使うと

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{h}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k!)}\frac{h^k}{n^k} \\
&= 1 + h + \sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{n^k}\frac{h^k}{k!}
\end{aligned}
$$

ですが，$n(n-1)\cdots(n-k) \leq n^k$ に注意すれば $|h| < 1$ においては

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=2}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k)}{n^k}\frac{h^k}{k!}\right| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} |h|^k \\
&= |h|^2 \frac{1}{1-|h|}
\end{aligned}
$$

となります．これは全ての $n \geq 2$ に対して同時に成り立つので，(D.2) において $|e^h - (1+\frac{h}{n})^n| \leq |h|^2$ となるように n を大きくとっておけば

$$
\begin{aligned}
|e^h - 1 - h| &\leq \left|\left(1+\frac{h}{n}\right)^n - 1 - h\right| + |h|^2 \\
&\leq |h|^2 \left(1 + \frac{1}{1-|h|}\right)
\end{aligned}
$$

となって，これから $e^h = 1 + h + o(h)$ $(h \to 0)$ がわかります．あとは全体に e^x をかければ，

$$
e^{x+h} = e^x + e^x h + o(h), \quad h \to 0
$$

となって，これは $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x$ を意味します．

対数関数の微分を先にする方法に比べると少し複雑ですが，どれくらい大変かを知っておくのは悪くないですし，この順番でもできるということに安心する人もいると思うので，紹介しました．