平均値の定理と微積分学の基本定理

5.6 節で，平均値の定理を使うと微積分学の基本定理 (2) の証明が簡単になると述べたのですが，どう使うのかについて説明しておいた方が良いように思ったので補足します．

念のため，平均値の定理の主張を思い出しておきましょう．

定理． 閉区間 $[a,b]$ 上で定義された連続関数 f が，開区間 (a,b) で微分可能であるとする．このとき，以下を満たす $c \in (a,b)$ が存在する：

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a). \tag{1}$$

まず「本書の方針でもかなり易しくなります」の方から説明します．これは 71 ページで f' の Riemann 和を作るところで，平均値の定理が存在を保証してくれる

$$f'(\xi_k)\frac{b-a}{n} = f\left(\frac{k+1}{n}(b-a)\right) - f\left(\frac{k}{n}(b-a)\right)$$

を満たす $\xi_k \in (\frac{k}{n}(b-a), \frac{k+1}{n}(b-a))$ を代表点にとれば，そこに書いてある式の 1 行目の近似が等式に変わるので，例 5.5.1 で指摘したような問題は起きないということです．

次に「(1) に帰着させることができて簡単になります」の方を説明します．微積分学の基本定理 (1) によると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f'(y)\mathrm{d}y = f'(x)$$

が成り立ちます．従って

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) - \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y\right) = 0$$

となり，「導関数が恒等的に 0 である関数は定数関数」という事実（∗）を使えば，$f(x) - \int_a^x f'(y)\mathrm{d}y$ は定数関数であることがわかります．あとは $x = a$ での値が $f(a)$ であることから，微積分学の基本定理 (2) が従います．平均値の定理は上で使った事実（∗）の証明に使われています．実際，f' が恒等的に 0 なら，式 (1) の右辺は a, b, c の位置によらず 0 になるので，$f(a) = f(b)$ となります．この辺りの議論は，多くの微積分の本において「不定積分の定数差を除いての一意性」などを経由していて，微積分学の基本定理の証明では直接見えなくなっているので，平均

値の定理を使っていることを意識していない人も多いと思います．ちなみに本書においては，事実（$*$）は命題 5.2.1 の (1) で，その証明に微積分学の基本定理 (2) を使うので，上の議論を用いることはできません．

最後に「難しいところをそこに押し込めただけ」についても，補足しておきます．微積分学の基本定理 (2) の証明を (1) に帰着する方針の証明を「逆引き」で実数の連続性 1 か 2 まで辿ると，以下のようになります：

(1) $\int_a^x f'(y)\mathrm{d}y$ は $f(x)-f(a)$ と微分が一致する．
(2) 微分が一致する関数の差は定数であり，$x=a$ とすれば 0 とわかる．
(3) 微分が一致する関数の差が定数なのは，平均値の定理による．
(4) 平均値の定理は，$(a,f(a))$ と $(b,f(b))$ を通る一次関数との差をとることで，$f(a)=f(b)$ の場合，つまり Rolle の定理に帰着される．
(5) Rolle の定理は，最大値・最小値の存在定理と，関数の極値での微分が 0 であることからわかる．
(6) 最大値・最小値の存在定理は，値域において有界集合が上限を持つことと，定義域において有界列が収束部分列を持つことからわかる．
(7) 有界集合が上限を持つことは，実数の連続性 1 からわかる．
(8) 値域が有界集合であることは，有界列が収束部分列を持つことからわかる．
(9) 任意の有界列が収束部分列を持つことは，実数の連続性 2 からわかる．

この (4) から (9) が見えなくなることを，「難しいところをそこに押し込めた」と言っています．この議論は手数も多く，(1) や (2) がやや唐突であることも気になります．本書の微積分学の基本定理 (2) の証明を，同じように要約して比較してみると違いがわかると思います．