Riemann 積分の定義について

本書では Riemann 積分を定義するときに，読み易さのために「分割を限りなく細かくする」という，高校数学の極限に似た表現を使いました．

定義 4.2.1. 区間 $[a,b]$ 上の関数 f が Riemann 積分可能であるとは, 上の $S(f;\underline{x},\underline{\xi})$ が分割を限りなく細かくするときに，$\underline{x}$ や $\underline{\xi}$ の具体的なとり方にはよらずに同じ極限に収束することをいい，その極限を $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ と書く．（書籍ではこのあと積分区間に関する規約があるが，それは省略）

これを現代的な定義で書くなら，以下のようになります．

定義 4.2.2. 区間 $[a,b]$ 上の関数 f が Riemann 積分可能であるとは, ある $S_{a,b}(f) \in \mathbb{R}$ が存在して，どんな小さな $\varepsilon > 0$ に対しても，$\delta > 0$ をそれに応じて十分小さく取れば,

$$\begin{aligned}&\max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1}) < \delta,\\ &x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1} \quad (0 \leq k \leq n-1)\end{aligned}$$

を満たす全ての $\underline{x}$ と $\underline{\xi}$ に対して $|S(f;\underline{x},\underline{\xi}) - S_{a,b}(f)| < \varepsilon$ とできることをいう．このとき，$S_{a,b}(f)$ を $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ と書く．

この二番目の定義を明記しておくかどうかは，最後まで悩んだのですが，これだけを見て理解が深まるように思えなかったので，結局は書かないことにしました．連続関数の Riemann 積分可能性の証明や，微積分学の基本定理 (2) の証明では定義 4.2.2 の形を使っているので，それらを読む過程で内容を把握できると期待しています．

実際のところ定義 4.2.2 は，数列の収束とも関数の収束とも違う,「有向点族の収束」というやや高度な概念になっているのです．数列の収束や関数の収束では，動かすパラメータ（$\mathbb{N}$ や $\mathbb{R}$）に自然な順序や距離が入っていました．上の定義では,分割 $\underline{x}$ と代表点 $\underline{\xi}$ の組という複雑なパラメータに対して,「分割の最大幅」というやや人工的な基準を入れて収束を議論しています[†1]．この辺りが，初見では難しく見えると思うので，本書では「使いながら慣れる」という方針をとりました．

[†1] これが人工的であるというのは，例えば「ある分割が他の分割の細分になっているときに小さい」という考え方も同様に自然だからです．