Heine–Borel の定理の直接証明

本書では、Heine–Borel の定理を、実数の連続性の一つの表現である「Cauchy 列の収束」を使って証明しました。ここでは、「実数は十進無限小数である」という定義から直接証明する方法を紹介します。

まず、 $M \in \mathbb{N}$ を十分大きくとって、 $1/10^M < \min\{\delta_a, \delta_b\}$ となるようにします。そうすると、 $k_1/10^M \in [a, a + \delta_a)$ と $k_2/10^M \in (b - \delta_b, b]$ を満たす $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ が存在します。ここで、 $k_1 \geq k_2$ なら

$$[a, b] = \left[a, \frac{k_1}{10^M} \right] \cup \left[\frac{k_1}{10^M}, b \right] \subset (a - \delta_a, a + \delta_a) \cup (b - \delta_b, b + \delta_b)$$

と二個の区間で覆えるので、これが有限被覆になっています。以下では $k_1 < k_2$ の場合を考えます。この場合でも、

$$[k_1/10^M, k_2/10^M] = \bigcup_{m=k_1}^{k_2-1} \left[\frac{m}{10^M}, \frac{m+1}{10^M} \right) \quad (1)$$

の右辺に現れる全ての区間が有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ を使って覆えるなら、それらを全て集めて $(a - \delta_a, a + \delta_a)$ と $(b - \delta_b, b + \delta_b)$ も付け加えれば、 $[a, b]$ も有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ で覆えます。そこで、少なくとも一つはどんな有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ を集めても覆えないとし、その一つ（例えば一番左にあるもの）を I_M とします。

次に、区間 I_M を長さ $1/10^{M+1}$ ずつに分割したものを考えて、同じ議論をすることで、どんな有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ を集めても覆えない $I_{M+1} \subset I_M$ が見つかります。これを繰り返すと、端点が小数第 n 位までの有限小数であるような、長さ $1/10^n$ の区間の列 I_n であって、どの I_n も有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ では覆えないものを

$$[a, b] \supset I_M \supset I_{M+1} \supset I_{M+2} \cdots \quad (2)$$

となるように作ることができます。

ここで、 I_M に含まれる数は全て小数第 M 位までは決まっています。さらに、その中で I_{M+1} に含まれるものは小数第 $M+1$ 位が決まっているので、以下同様にこの手続きに従って小数第 $M+n$ 位 ($n \in \mathbb{N}$) を決めていけば、全ての区間 I_{M+n} に含まれる実数 c を作ることができます。この c は、(2) により $[a, b]$ に含まれてい

るので、対応する区間 $(c - \delta_c, c + \delta_c)$ があります。ところが n が十分大きくとれば

$$I_{M+n} \subset \left(c - \frac{1}{10^{M+n}}, c + \frac{1}{10^{M+n}} \right) \subset (c - \delta_c, c + \delta_c)$$

となるので、 I_{M+n} は一つの $(c - \delta_c, c + \delta_c)$ で覆えることになって矛盾が生じます。従って、(1) の右辺のいずれかの区間が有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ では覆えないとした仮定が誤りだったことになり、このとき (1) の後に書いた通り $[a, b]$ も有限個の $(x - \delta_x, x + \delta_x)$ で覆えます。