まえがき（初学者向け version）

これは広く自然科学系の学問を学ぶ人に向けて書いた，一変数関数の微積分に関する本です．構成が普通の微積分の本と違っているので，ちょっと変わった題名がついていますが，この本で初めて微積分学を学ぶこともできるように書いています．一つの基本的な執筆方針は，高校までの数学で詳しく説明されずに積み残されている伏線を明確に指摘して，できるだけ回収するということです．そして，それによって高校までに学んだ数学から自然に繋がる形で微積分の理論を展開します．そういう趣旨なので，内容はかなり理論寄りです．

構成が普通ではないと言われると，重要なことが抜けていたりするのではないかと心配になるかもしれないので，何が学べるかも述べておきます．本書とサポートページにある補足文書を合わせれば，「実数とは何か」という基礎的な話題から始めて，「円周率の効率的な近似計算」や「惑星の軌道が楕円であること」といった微積分学の記念碑的な成果までを，ほぼ完全な証明付きで学べるようになっています．事実として使うものの，証明を省略するのは，

- 実数の四則演算ができることや，図形の面積が持つ性質といった，一変数の微積分の内容とは言い難いもの，
- 収束する二つの数列の比の極限のように，自力で証明に挑戦することに意味があり，他の多くの本に証明が書いてあるもの，
- 関数の商の微分公式のように，高校の教科書に書かれている証明が，用語の意味さえ明確にすればそのまま通用するもの

に限りました．数学を専門とする場合を除けば，本書は自然科学系の学問を学ぶために十分な一変数の微積分の理論的内容を含んでいると思います．

数学を専門とする場合には，ある程度は他人と微積分の理解が共通していないと，話が合わなくて困ることもあるかもしれないので，普通の本もいずれは読むことをお勧めします．例えば，他の多くの本では微積分学の理論展開で重要な役割を果たす「平均値の定理」を，本書では扱いません．しかし，いずれにせよ本書を先に読んでおくことは役に立つと信じています．

ところで，本書では微積分に関わる概念の「定義」について考える場面が多くなり，やや面食らうかもしれないので，少し説明を加えておきます．定義とはある対象や用語が何を意味するかを定めたもので，例えば「円周率とは円周の長さの，直径に対する比である」は，円周率の定義です（円周の長さが直径に比例することは，前もって証明しておく必要があります）．これに対して「円周率は無理数である」は，定義に基づいて証明できる事実なので定理です．定義は唯一絶対のものではなく，例えば「円周率とは円の面積の，半径の 2 乗に対する比である」と定めても，結局は同じものになります．目的に応じて適切な定義を選んで理論を展開することは，数学の本ではよく行われることです．本書でも，高校までの数学で学んだ用語の定義を明確にしたり，ときには異なる定義をすることもありますが，どちらかが間違っているというわけではないので，心配しないでください．それから，定義が適切かどうかは，それに基づいてどれだけ豊かな理論が展開できるかで決まります．初見で意味がわからなくても，読み進めれば良さがわかってくることも多いので，定義だけを見て考え込まずに先に進むのが良いでしょう．

あとがき（初学者向け version）

本書を読み終えたら，一変数関数の微積分の理論の「骨格」になる内容は習得できています．とくに，実数とは何か，関数とは何か，極限とは何か，微分や積分とは何であってどういう問題に使えるか，といったことについて，一定の理解が得られたと思います．ここでは，本書の後に続けて学ぶことができる内容について，文献なども挙げながら紹介しておきます[†1]．

最も自然につながっているのは，多変数関数の微積分学です．例えば物理学では，力学でも三次元空間を運動する物体のエネルギーを考えたり，熱力学では温度と圧力から体積が決まったり，というように多変数の関数を扱うことが日常です．数学の中でも，多変数関数のグラフは曲面の基本的な例になり，その性質を調べるのには微積分が活躍します．

他には，本書でも何度か触れた微分方程式も，自然現象の記述に広く使われている概念で，それに関するまとまった理論があります．微分方程式は，未知関数が一変数の場合は常微分方程式，未知関数が多変数の場合は偏微分方程式と分類されますが，常微分方程式に限っても豊かな理論が展開されます．ただし，進んだ理論を学ぼうとすると，本書では扱わなかった一変数関数の微積分学の詳しい理論を知っていた方が良い場面も出てきます[†2]．

数学を専門としない人は，おそらく必要に迫られて，上に書いたことを含む幅広い分野の数学をユーザーの立場で学ぶことと思います．その際には，直観的な理解を優先して証明が省略されることもあると思いますが，最初の理解としてはそれでよいでしょう．本書において，高校で学んだ微積分の内容のほとんどに証明をつけることができたように，全ての数学的事実には証明がつけられるのです．そういう「数学に対する安心感」を持ってもらうことが，高校で学んだ数学から自然につな

[†1] 文献については，筆者が最初から最後まで通して読んだことがあるものに限っています．そのために，偏りがあり，とくに新しいものは抜けていることに注意してください．

[†2] 本書の内容だけに立脚して理論を展開することもある程度は可能だと思いますが，既存の常微分方程式の本は，既存の微積分学の本で学べる内容を前提にしているので，少なくとも普通の微積分の本も手元に置いておいた方が良いです．

がるように理論を展開した一つの目的でした．ユーザーの立場で概要を学んだ後に，その証明がどうしても気になるという場合は，以下の数学を専門とする人向けの案内が参考になると思います．

数学を専門とする人は，まずは普通の微積分学の本を読むのが良いでしょう．本書で扱わなかった一変数関数の微積分の理論の「肉付け」にあたる内容や，多変数関数の微積分は，この先にどんな数学を学ぶのにも必要になります．教科書的な本としては，笠原晧司『微分積分学』（サイエンス社）が，新しい概念を導入するときの説明が丁寧で良いと思います．教科書的ではない本なら，溝畑茂『数学解析』（朝倉書店）が，内容豊富で面白いと思います．これらの本には，常微分方程式論の基本的な内容も書かれています．また，どんな本で学ぶにせよ，関数列の一様収束くらいまで学んだら，T.W. Körner,『フーリエ解析大全』（朝倉書店）を読んでみることを勧めます．この本の最初の部分では，本書でも繰り返し強調した「一様な評価」を駆使して，面白い結果がいくつも証明されます．そういう場面を見ることで，極限の現代的な定義の有用性がよりよくわかると思います．

最後に，本書に続けて普通の微積分学の本を読む際に役立つと思う注意をしておきます．本書では実数を十進無限小数の集合として定義しました．しかし，実は第3章以降では，その定義を直接は使っていません．実数の性質として，四則演算ができることと，大小関係と絶対値が満たす性質，実数の連続性，の三つだけを使って理論を展開しています．そうすると，微積分学の理論は十進無限小数の集合に限らず，これらの性質を満たす集合の上で展開できるということになります．数学では，理論の基礎として何が本質的かが明確であった方が良いという考え方があるので，世に出ている多くの微積分学の本では，上の三つの性質を「公理」として導入し，議論の前提とする立場を取ります．この考え方には，高校までの数学ではおそらく出会わないので，最初は面食らうかもしれませんが，上のような背景があると知って読めば抵抗感は薄くなると思います．