

δ 関数の Fourier 変換

福島竜輝

点 $x \in \mathbb{R}$ に集中した Dirac 測度を δ_x とすると^{*1}, その Fourier 変換および逆変換は

$$\mathcal{F}\delta_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-iy\xi} \delta_x(dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ix\xi}, \quad \mathcal{F}^{-1}\delta_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi}$$

となります^{*2}. これを使ってみると, この講義で示したことの面白い解釈ができます. いろいろと正当化できないステップがあるので, あくまで形式的な議論であることには注意してください. 以下では, 関数に対する Fourier 変換で学んだこととの対応が見やすいように, 形式的に $\delta_x(dy) = \delta_x(y)dy$ と書いて, $\delta_x(\cdot)$ を δ 関数と呼びます (そういう関数は存在しませんが).

まず反転公式が δ_x に対しても成り立つとすると, δ 関数の積分表示

$$\delta_x(y) = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\delta_x(y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(y-x)\xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(x-y)\xi} d\xi \quad (1)$$

が得られます. ここで最後の等式は「 δ 関数は, あるとすれば実数値関数のはずだから, 複素共役をとっても不変」と考えています. この積分は $x = y$ のとき ∞ , それ以外のときは「周期関数の積分だから, 何となく消えそう」と安直に解釈すれば, 非専門家向けによく行われる δ 関数の解釈と一致します.

これを使うと Fourier の反転公式は

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(y) e^{-iy\xi} dy \right) e^{ix\xi} d\xi \\ &= \int f(y) \left(\int \frac{1}{2\pi} e^{i(x-y)\xi} d\xi \right) dy \\ &= \int f(y) \delta_x(y) dy \\ &= f(x) \end{aligned}$$

と解釈できます (最後の等式では δ 関数を δ 測度に戻しました). 他にも $\mathcal{F}\delta_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ と, 畳み込みと Fourier 変換の関係と反転公式を使って

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) &= \int \mathcal{F}f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ix\xi} d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}f \mathcal{F}\delta_0)(x) \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f * \delta_0))(x) \\ &= f * \delta_0(x) \\ &= \int f(x-y) \delta_0(y) dy \\ &= f(x) \end{aligned}$$

^{*1} 念のためですが $x \in A$ のとき $\delta_x(A) = 1$, $x \notin A$ のとき $\delta_x(A) = 0$ によって定まる測度です.

^{*2} 第 15 回の講義でも述べたように, Fourier 変換と逆変換を適用する関数の変数は, それぞれ $\mathbb{R}$ とその Pontryagin 双対 (この場合は偶然 $\mathbb{R}$ に一致) の元として区別したほうが良いので, 後者をギリシャ文字にして区別しています.

としたり, Fourier 変換が内積を保つことと $\overline{\mathcal{F}\delta_x(\xi)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}$ を使って

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f(x) &= \int \mathcal{F}f(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ix\xi}d\xi \\ &= \int \mathcal{F}f(\xi)\overline{\mathcal{F}\delta_x(\xi)}d\xi \\ &= \langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}\delta_x \rangle \\ &= \langle f, \delta_x \rangle \\ &= \int f(y)\overline{\delta_x(y)}dy \\ &= f(x)\end{aligned}$$

と解釈することもできます.

これらはあくまで形式的な計算ですが, 解釈として知っておくのは悪くないですし, 第 13 回の資料で反転公式の証明に総和法を使った議論も,

$$H_t(x-y) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-t|\xi|+i(x-y)\xi}d\xi$$

と (1) を比較すれば, これが $\delta_x(y)$ を近似しているという意味がわかって, 見通しが良いかもしれません.

このように関数でないものにまで Fourier 変換や畳み込みを拡張することは有用で, 例えば Fourier 変換と微分の関係思い出すと形式的には

$$\mathcal{F}\delta_x(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi} \implies \mathcal{F}(\delta'_x)(\xi) = \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}}e^{-ix\xi}$$

となるように, 到底まともに定義できなさそうな δ'_x の Fourier 変換が普通に意味のある関数になったりします*3. こういうことを正当化するのがいわゆる超関数の理論で, そこでは δ_x は何回でも微分できるようになります. この方面に興味があれば, 気軽に読める入門書としては Strichartz, “A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms” の前半が良いと思います.

*3 定義できなさそうとは言っても, これは電磁気学の双極子に対応するので, 割と日常的に使われている概念です.