

可分でない Hilbert 空間の例

福島竜輝

可分でない Hilbert 空間のそこそこまともな例として L^2 概周期関数の集合を紹介します。周期関数の有限和として

$$a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t} + \cdots + a_N e^{i\omega_N t}, \quad (a_n)_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N, (\omega_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N$$

のように書ける関数を概周期的と言います。以下ではこのように書いたら ω_n は全て異なるものと約束します。ここで $(\omega_n)_{n=1}^N$ がすべて有理数、あるいはもっと一般に任意の二つの比が有理数ならば周期関数になることがわかります。一方で一つでも $\omega_k/\omega_l \notin \mathbb{Q}$ となる (ω_k, ω_l) の組があると、周期的にはなりません。さて $f(t) = \sum_{m=1}^M a_m e^{i\omega_m t}$, $g(t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{i\tilde{\omega}_n t}$ に対して、

$$\langle f, g \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{g(t)} dt$$

とすると内積を定めることがわかります。実際、任意の $\omega_m \neq \tilde{\omega}_n$ に対して、

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i\omega_m t} e^{-i\tilde{\omega}_n t} dt \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e^{i(\omega_m - \tilde{\omega}_n)t} dt = 0 \quad (1)$$

である*1ことを用いると、

$$\langle f, g \rangle = \sum_{m,n} a_m \overline{b_n} 1_{\{\omega_m = \tilde{\omega}_n\}}$$

と書き直せて、これが内積の公理を満たすことは簡単にわかります。この内積から定まるノルムを $\|\cdot\|$ と書くことにします。この設定では (1) によって $e_\omega(t) = e^{i\omega t}$ ($\omega \in \mathbb{R}$) で定まる関数の族が非可算濃度を持つ正規直交系であることがわかります。

ただし上のように有限和だけ考えていると完備にはなりません。実際 $a_n = 2^{-n}$ とし $f_N(t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\omega_n t}$ と定めると、これはノルム $\|\cdot\|$ に関して Cauchy 列になり、さらに極限 $f(t) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{i\omega_n t}$ も一様収束するので関数として意味を持ちますが、 f は有限和では表せません。そこで

$$\left\{ \sum_{n=1}^N a_n e^{i\omega_n t} : N \in \mathbb{N}, (a_n)_{n=1}^N \in \mathbb{C}^N, (\omega_n)_{n=1}^N \in \mathbb{R}^N \right\}$$

の距離 $\|\cdot\|$ に関する完備化 $B^2(\mathbb{R}_+)$ を考えます。すると完備化の一般論から、上の集合は $B^2(\mathbb{R}_+)$ で稠密になっているので、講義資料 7 ページで証明した定理から $\{e_\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ は $B^2(\mathbb{R}_+)$ の完全正規直交系であることが従います。

*1 $\frac{2\pi}{\omega_m - \tilde{\omega}_n} \mathbb{Z}$ の中で T に最も近いものを $k_T \frac{2\pi}{\omega_m - \tilde{\omega}_n}$ として、そこまでの積分と、そこから T までの積分に分ける。

さて、ここで任意提出レポートの問題7の結果を仮定すると、任意の $f \in B^2(\mathbb{R}_+)$ に対して $\langle f, e_\omega \rangle \neq 0$ となる ω は高々可算個しかないので、それを $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ とすれば

$$f = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle f, e_{\omega_n} \rangle e_{\omega_n}$$

という展開が成り立ちそうな気がしますが、これを確かめるのは難しくありません。可算和になってしまえば Bessel の不等式から $\sum_{n=1}^N \langle f, e_{\omega_n} \rangle e_{\omega_n}$ が Cauchy 列であることがわかるので極限は存在します。それを g とすると、

$$\langle f - g, e_\omega \rangle = \langle f, e_\omega \rangle - \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=1}^N \langle f, e_{\omega_n} \rangle e_{\omega_n}, e_\omega \right\rangle$$

ですが、この右辺は $\omega = \omega_m$ ($m \in \mathbb{N}$) ならば $\langle f, e_{\omega_m} \rangle - \langle f, e_{\omega_m} \rangle$, $\omega \notin \{\omega_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ならば $0 - 0$ となるので、いずれにせよ 0 です。ここで $\{e_\omega\}_{\omega \in \mathbb{R}}$ が $B^2(\mathbb{R}_+)$ の完全正規直交系だったことを使うと、 $f - g = 0$ であることが従います。

ここまでは抽象論で片付く簡単な話でしたが、 $\|\cdot\|$ について落ち着いて考えると、完備化の意味はかなり微妙です*2。実際、 $B^2(\mathbb{R}_+)$ を関数空間のようなものだと思って安易に考えると

$$\|1_{[0,1]} - 1_{[0,2]}\| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |1_{[0,1]}(t) - 1_{[0,2]}(t)|^2 dt = 0$$

を見て驚くことになります。より一般に $B^2(\mathbb{R}_+)$ においては、ある有限の区間 $(0, M)$ の外で一致するような関数はすべて同じものになってしまいます。これは完備化を抽象的に行った中で隠れて行われた同一視に起因しています。初めから関数空間が答えとして与えられていた L^p の場合とは違った注意が必要になっているわけです。

実はここで作った $B^2(\mathbb{R}_+)$ は関数空間ではないものの、関数空間

$$\mathcal{M}^2(\mathbb{R}_+) = \left\{ f \in \bigcup_{T>0} L^2(0, T) : \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

を擬距離 $\rho(f, g) = \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt$ が 0 であるという同値関係で割った商空間のある閉部分空間と同一視できます。従って、ほぼ関数空間だと思ってもそれほど間違いではなく、 $B^2(\mathbb{R}_+)$ を Besicovitch の概周期関数の空間と言ったりします*3。

*2 念のためですが、ここでの微妙の意味は「細かい所に重要な意味・味が含まれていて簡単には言い表せない様子」で、最近よく使われる否定的な「A: それおいしい? B: んー、ビミョー。」の用法とは違います。

*3 ちなみにこの空間が考えられたのは 95 年ほど前で、当時は距離の公理を満たすために商空間を考えるなどということは、一般的ではなかったようです。ですから Besicovitch 自身は本当に関数空間を考えていました。