

Lebesgue 測度に関する積分の平行移動に関する連続性

福島竜輝

第 6 回の講義資料で Lebesgue 測度に関する積分が平行移動について連続であるという事実が必要になります。これは当たり前に見えますが証明はかなり大変で、一応は Lebesgue 積分論の内容だと思うので補足資料にしました。以下では $\mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$ を Lebesgue 可測集合の全体、 μ を $\mathbb{R}^d$ 上の Lebesgue 測度としますが、積分するときは単に $\int dy$ と書きます。

命題 1. 任意の $f \in L^p(\mu)$ ($p \in [1, \infty)$) に対して $\lim_{x \rightarrow 0} \int |f(x+y) - f(y)|^p dy = 0$.

Proof. まず Lebesgue 積分を定義するときのように単関数の列 $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x)$, $|s_n(x)| \leq |f(x)|$ となるようにとる。すると Minkowski の不等式により

$$\begin{aligned} \left(\int |f(x+y) - f(y)|^p dy \right)^{1/p} &\leq \left(\int |f(x+y) - s_n(x+y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int |s_n(x+y) - s_n(y)|^p dy \right)^{1/p} + \left(\int |s_n(y) - f(y)|^p dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

となって、第一項と第三項は Lebesgue の収束定理により $n \rightarrow \infty$ で 0 に収束するので、第二項が $x \rightarrow 0$ で 0 に収束することを示せば十分。そのために

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^K a_{n,k} 1_{E_{n,k}}(x), \quad a_{n,k} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, E_{n,k} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)$$

と書く。仮定より $|f|^p$ が可積分なので、全ての n, k について $\mu(E_{n,k}) < \infty$ であることに注意。この表示を使うと、

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |s_n(x+y) - s_n(y)|^p dy \right)^{1/p} &\leq \sum_{k=1}^K |a_{n,k}| \left(\int |1_{E_{n,k}}(x+y) - 1_{E_{n,k}}(y)|^p dy \right)^{1/p} \\ &= \sum_{k=1}^K |a_{n,k}| \mu(E_{n,k} \Delta (x + E_{n,k}))^{1/p}. \end{aligned} \tag{1}$$

ただし $x + A = \{x + y \mid y \in A\}$ (平行移動), $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (対称差) である。ここで

補題 1. $E \subset \mathbb{R}^d$ が Lebesgue 可測で測度有限ならば $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(E \Delta (x + E)) = 0$.

を認めれば (1) で $x \rightarrow 0$ としたとき、和の各項が 0 に収束することが分かる。 $\square$

ここまでの議論には何も難しいところはありませんが、この補題 1 の証明のためには Lebesgue 測度の構成に戻る必要があります。そこが大変です。別の補題を準備するため、記

号をいくつか導入します. $\mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ を d 次元直方体 $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i)$ の全体とすると, $A \subset \mathbb{R}^d$ の Lebesgue 外測度 μ^* は

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) \mid \{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d) \text{ は非交差} \right\}$$

と定義されるのでした. ただし非交差とは $m \neq n \Rightarrow R_m \cap R_n = \emptyset$ ということ, この条件から $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(R_n) = \mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n)$ です. これを使って Lebesgue 内測度を

$$\mu_*(A) = \sup \{ \mu^*(K) \mid K \subset A \text{ は有界閉集合} \}$$

で定めると^{*1}, 次が成り立ちます.

補題 2. $E \subset \mathbb{R}^d$ が有界で Lebesgue 可測ならば $\mu^*(E) = \mu_*(E)$ ^{*2}.

Proof. Carathéodory の定義によると $E \subset \mathbb{R}^d$ が Lebesgue 可測であるとは, 全ての $A \subset \mathbb{R}^d$ に対して

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \setminus E) \quad (2)$$

が成り立つことであった. ここで A として E を含むような閉 d 次元直方体を取ると, $\mu^*(A \setminus E) = \mu^*(A) - \mu^*(E)$ となる. 次に任意の $\epsilon > 0$ に対して, 外測度の定義から非交差な $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ があって,

$$A \setminus E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n, \quad \mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \right) \leq \mu^*(A \setminus E) + \epsilon = \mu^*(A) - \mu^*(E) + \epsilon$$

となる. ここで ∂R_n が全て零集合であることも使うと

$$\mu^* \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^\circ \right) \leq \mu^*(A) - \mu^*(E) + \epsilon$$

とできる. すべての d 次元直方体は Lebesgue 可測であることを使えば, 上を整理して

$$\mu^* \left(A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^\circ \right) \geq \mu^*(E) - \epsilon$$

を得る. いま $A \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n^\circ$ は有界閉集合であるから, $\mu_*(E) \geq \mu^*(E)$ が分かり, 逆の不等式は明らかだから $\mu_*(E) = \mu^*(E)$ である. $\square$

補題 1 の証明. 補題 2 を用いると Lebesgue 可測な E と任意の $\epsilon > 0$ に対して非交差な $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ と有界閉集合 K を

$$K \subset E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n, \quad \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \right) - \epsilon \leq \mu(E) \leq \mu(K) + \epsilon$$

^{*1} これは Lebesgue 自身の定義とは異なります.

^{*2} 有界という仮定は努力すれば外せます. また実は逆も成り立ちます.

となるようにとれる. このときとくに $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n \setminus K) \leq 2\epsilon$ であり, また $N \in \mathbb{N}$ を十分大きくとれば $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R_n) \leq \mu(\bigcup_{n \leq N} R_n) + \epsilon$ とできることに注意する. これらを使うと

$$\begin{aligned} \mu((x + E) \setminus E) &\leq \mu\left(\bigcup_{n \leq N} (x + R_n) \setminus K\right) + \epsilon \\ &\leq \mu\left(\bigcup_{n \leq N} (x + R_n) \setminus R_n\right) + \mu\left(\bigcup_{n \leq N} R_n \setminus K\right) + \epsilon \\ &\leq \sum_{n=1}^N \mu((x + R_n) \setminus R_n) + 3\epsilon. \end{aligned}$$

ここで $R_n \in \mathcal{R}(\mathbb{R}^d)$ に対しては $\lim_{x \rightarrow 0} \mu((x + R_n) \setminus R_n) = 0$ は直接計算で分かるから, $\lim_{x \rightarrow 0} \mu((x + E) \setminus E) = 0$ が従う. もう一つの $\lim_{x \rightarrow 0} \mu(E \setminus (x + E)) = 0$ も同様. $\square$

いくつか補足をします. この資料では Lebesgue 測度に限って述べたので d 次元直方体が主要な役割を果たしましたが, より抽象的な空間では可測集合が「外側からは開集合, 内側からは閉集合で近似できる」という性質を考え, これが成り立つ測度は位相正則性を持つと言います. このような一般化について興味があれば, 例えば Stroock の本 [2] の p.35-36 と Section 3.2 を見てください. 一方で Lebesgue 測度に限ると, この資料での議論は単関数 (simple function) が $E_{n,k}$ を d 次元直方体に限った単関数で L^p ($p < \infty$) の意味では近似できることを示しています. この後者のことを “really simple function^{*3}” ということもあります. 上の証明を見れば, 命題の難しさは単関数が実は単純でないことに由来していることが分かるので, なかなかの射た呼び方だと思います. このようなことを単調族定理を使って抽象化した取り扱い, 例えば Lieb と Loss の本 [1] の Section 1.18 に書いてあります.

参考文献

- [1] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.
- [2] Daniel W. Stroock. *Essentials of integration theory for analysis*, volume 262 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 2011.

^{*3} Eric Carlen の造語だそうです.