Hadamardの三線定理を用いたHölderの不等式の証明

福島竜輝

予備資料で「正則関数の最大値原理」を紹介しました．それはHölderの不等式の証明をそれを使って行う予定だったからですが，いろいろ考えた結果，講義資料に書いた初等的証明に変えました．しかし元々考えていた証明にも良いところがあるので，興味のある人のために資料として残しておきます．

鍵になるのは次の複素関数論の結果です．

Theorem 1 (Hadamardの三線定理)**.** $\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \operatorname{Re} z \le 1\} \subset \mathbb{C}$ 上の有界連続関数 F は，その内部では正則であるとする．このとき $x \in [0,1]$ に対して

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(x+iy)|$$

と定めると，$M(x) \le M(0)^{1-x} M(1)^x$ が成り立つ．

Proof. $F_\varepsilon(z) = F(z) M(0)^{-z} M(1)^{z-1} e^{\varepsilon(z^2-1)}$ と定めると，$\{z \in \mathbb{C}\colon 0 < \mathrm{Re}\ z < 1\}$ で正則であり，さらにこの領域内で $z \to \infty$ とすると $F_\varepsilon(z) \to 0$ であることが簡単に確かめられます．これと正則関数に対する最大値原理を組み合わせると，$|F_\varepsilon|$ は最大値を $\{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Re}\ z = 0\}$ または $\{z \in \mathbb{C}\colon \operatorname{Re} z = 1\}$ でとることが分かります．ところが $M(0), M(1)$ の定義から，これらの集合の上では $|F_\varepsilon| \le 1$ なので，$\{z \in \mathbb{C}\colon 0 \le \mathrm{Re} z \le 1\}$ 全体で $|F_\varepsilon| \le 1$ となります．$z = x+iy$ と書いて整理すると

$$|F(x+iy)| \le M(0)^{1-x} M(1)^x |e^{\varepsilon(z^2-1)}|$$

ですが，y, ε は任意なので，求める不等式を得ます． □

Remark 1. $e^{\varepsilon(z^2-1)}$ のような収束因子をかけておいて最大値原理を使う議論は，Phragmén–Lindelöfの原理と呼ばれています．

Theorem 2 (Hölderの不等式)**.** $p, q \in (1,\infty)$ が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ を満たすときに，任意の可測関数 f, g に対して，

$$\int |fg| \mathrm{d}\mu \le \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu \right)^{1/p} \left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu \right)^{1/q}.$$

Proof. まず f, g が単関数の場合には，$F(z) = \int |f(t)|^{p(1-z)} |g(t)|^{qz} \mu(\mathrm{d}t)$ は正則関数の有限和だから正則です．また $\operatorname{Re} z \in [0,1]$ なら明らかに有界連続でもあります．さら正のに実数 a に対して $|a^z| = a^{\operatorname{Re} z}$ であることを思い出すと，積分に対する三角不等式から

$$M(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}} |F(x+iy)| \le F(x)$$

がわかります．最後の不等式は $y=0$ で等号が成立しているので，結局 $M(x)=F(x)$ となります．そこで $x=1-\frac{1}{p}=\frac{1}{q}$ として Hadamard の三線定理を用いると，

$$\int |fg|\mathrm{d}\mu \leq \left(\int |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int |g|^q \mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

が得られて，これは Hölder の不等式です．あとは一般の可測関数 f,g に対して，$n\to\infty$ において $f_n\nearrow|f|$, $g_n\nearrow|g|$ となるような単関数の列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}},\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が取れたことを思い出せば，単調収束定理を使って f,g に対する Hölder の不等式が従います． □

Remark 2. この証明は講義資料の証明より高度な知識を使っていますが，最初に示した Hadamard の三線定理が Riesz–Thorin の補間定理のような実解析で重要な結果の証明にそのまま使えるという利点があります．この講義では Fourier 級数の理論は「十分滑らかな関数に対する一様収束」と「L^2 関数に対する L^2 収束」という最も簡単な場合しか扱いませんが，L^p 関数に対して何が起こるかを調べるときに，最初に必要になるのが Riesz–Thorin の補間定理です．