ノルム空間の完備化の存在証明

$(V, \|\cdot\|)$ の完備化 $(V', \|\cdot\|')$ の作り方はいくつかありますが．ここでは $\mathbb{R}$ を $\mathbb{Q}$ の Cauchy 列全体の同値類として構成したのと同じ方法を紹介します．

手続き自体は予備資料におけるものと全く同じで，

$$V' = \left\{(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V \;\middle|\; (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{は } \|\cdot\| \text{ に関する Cauchy 列}\right\} / \sim,$$

$$(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v'_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|v_n - v'_n\| = 0$$

と定めます．点列の和やスカラー倍は，各項の和やスカラー倍として自然に定義されます．同値類に対しても矛盾なく定義されることは，簡単に確かめられます[1]．従って V' は線型空間になります．

[1] 念のためですが「矛盾なく定義される」とは，演算の結果が同値類の代表元に依らないこと，つまり和なら $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ならば $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (u'_n + v'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ということです．

ノルム空間の完備化の存在証明

新しいノルムは，まず点列に対して

$$\|(v_n)_{n\in\mathbb{N}}\|' = \limsup_{n\to\infty} \|v_n\|$$

と定めます．これが同値類の代表元に依らないこととノルムになることは，和とスカラー倍ほど簡単ではありませんが，難しくはありません．こうして $(V', \|\cdot\|')$ はノルム空間になります．

最も大変なのは $(V', \|\cdot\|')$ が完備であることです．これを示すために $(V', \|\cdot\|')$ の Cauchy 列 $(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ をとります．各項は

$$v^{(k)} = [(v_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}]$$

という V の Cauchy 列を代表元とする同値類であり，$\|\cdot\|'$ の定義から $\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\|v_n^{(k)} - v_n^{(\infty)}\| \to 0$ となる V の Cauchy 列 $(v_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}}$ を作る必要があるわけです．

ノルム空間の完備化の存在証明

とりあえず点列の列なので，並べて書いてみると

$$
\begin{aligned}
v^{(1)} &= [v_1^{(1)}, v_2^{(1)}, \dots] \\
v^{(2)} &= [v_1^{(2)}, v_2^{(2)}, \dots] \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

という感じで，対角線論法と同じように $(v_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}} = (v_n^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ とすれば良いと思うかもしれませんが，これは上手くいきません [2].

代わりに次のように考える必要があります．まず l_1 を

$$
j, k \geq l_1 \Rightarrow \|v_j^{(1)} - v_k^{(1)}\| \leq 1
$$

となるようにとります（$v^{(1)}$ は Cauchy 列なのでとれます）[3].

[2] 以下の議論で何を頑張っているかを見れば理由は分かると思いますが，どうして上手くいかないか先に考えてみるのも良いと思います．

[3] 実はこのステップは要らないのですが，ウォーミングアップのためです．

ノルム空間の完備化の存在証明

ここから各 $v^{(k)}$ が Cauchy 列であることと，$(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が Cauchy 列の Cauchy 列であることを上手く組み合わせるところがトリッキーです.

次に $l_2 > l_1$ を

$$
\begin{aligned}
j,k \geq l_2 &\Rightarrow \|v_j^{(2)} - v_k^{(2)}\| \leq \tfrac{1}{2} \quad \text{かつ} \\
j \geq l_2 &\Rightarrow \|v_j^{(1)} - v_j^{(2)}\| \leq \|v^{(1)} - v^{(2)}\|' + \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

となるようにとります．以下各 $n \in \mathbb{N}$ に対してこれを繰り返すのですが，2 番目の条件では一つ前だけではなく「n より前の全て」を気にすることにして，$l_n > l_{n-1}$ が

$$
\begin{aligned}
&\text{(C1)} \qquad j,k \geq l_n \Rightarrow \|v_j^{(n)} - v_k^{(n)}\| \leq \tfrac{1}{n} \quad \text{かつ} \\
&\text{(C2)} \qquad j \geq l_n \Rightarrow \forall k < n, \|v_j^{(k)} - v_j^{(n)}\| \leq \|v^{(k)} - v^{(n)}\|' + \tfrac{1}{n}
\end{aligned}
$$

をみたすように数列 $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ を定めます.

ノルム空間の完備化の存在証明

この数列を使って $(v_n^{(\infty)})_{n\in\mathbb{N}} = (v_{l_n}^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ と定めましょう．すると まず全ての $j < k$ に対して，数列 $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の定め方から

$$
\begin{aligned}
\|v_j^{(\infty)} - v_k^{(\infty)}\| &= \|v_{l_j}^{(j)} - v_{l_k}^{(k)}\| \\
&\le \|v_{l_j}^{(j)} - v_{l_k}^{(j)}\| + \|v_{l_k}^{(j)} - v_{l_k}^{(k)}\| \\
&\le \overset{l_j \text{ の定義}}{\frac{1}{j}} + \overbrace{\|v^{(j)} - v^{(k)}\|' + \frac{1}{k}}^{l_k \text{ の定義}}
\end{aligned}
$$

となって，$(v^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ が $\|\cdot\|'$ の Cauchy 列だったことを思い出せば，右辺は $j, k \to \infty$ で 0 に収束します．つまり $v^{(\infty)}$ は $\|\cdot\|$ の Cauchy 列です．

ノルム空間の完備化の存在証明

あとは $\|v^{(n)} - v^{(\infty)}\|' \to 0$ $(n \to \infty)$ を示すことが残っていますが,

$$\begin{aligned} \|v_m^{(n)} - v_m^{(\infty)}\| &= \|v_m^{(n)} - v_{l_m}^{(m)}\| \\ &\leq \|v_m^{(n)} - v_{l_m}^{(n)}\| + \|v_{l_m}^{(n)} - v_{l_m}^{(m)}\| \end{aligned}$$

と書けば，全ての $m \geq l_n \geq n$ に対して数列 $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ の定め方から

$$\|v_m^{(n)} - v_{l_m}^{(n)}\| + \|v_{l_m}^{(n)} - v_{l_m}^{(m)}\| \leq \frac{1}{n} + \|v^{(n)} - v^{(m)}\|' + \frac{1}{m}$$

となります．従って

$$\begin{aligned} \|v^{(n)} - v^{(\infty)}\|' &= \limsup_{m\to\infty} \|v_m^{(n)} - v_m^{(\infty)}\| \\ &\leq \frac{1}{n} + \limsup_{m\to\infty} \|v^{(n)} - v^{(m)}\|' \end{aligned}$$

この右辺は $n \to \infty$ で 0 に収束するので，完備性が示せました．

V が V' に稠密に“含まれる”ことの証明

“含まれる”に“ ”がついている理由は，すでに明らかだと思いますが，V' は V の Cauchy 列の同値類の集合であって，直接には V 自体を含まないからです．

実は同じ問題は，有理数の完備化として実数を構成した場合に，すでに存在します．厳密主義で名高い Bourbaki のメンバーであった J.-P. Serre は「$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ と書くのは馬鹿げている．左辺は $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ の同値類の集合で，右辺は $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ の部分集合の同値類の集合だ．」と言ったことがあるそうです．

しかし解決法も同じで，難しくありません．まず感覚的な説明をすると，$v \in V$ を $(v, v, \ldots)$ という同じ要素が並んだ列と対応させれば，これは明らかに Cauchy 列なので $[(v, v, \ldots)] \in V'$ です．さらに任意の $[(v_1, v_2, \ldots)] \in V'$ は，$V \ni v_n \leftrightarrow [(v_n, v_n, \ldots)]$ によって

$$\|[(v_1, v_2, \ldots)] - [(v_n, v_n, \ldots)]\|' = \limsup_{m \to \infty} \|v_m - v_n\| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

と近似できるので，稠密性も分かります．

V が V' に稠密に“含まれる”ことの証明

これを数学的に正確に書くと，以下のようになります[4]：“対応”とは $\iota\colon V \to V'$ を $\iota(v) = [(v, v, \ldots)]$ と定めるということです．この写像が線型でかつ $\|\iota(v)\|' = \|v\|$ を満たすことは明らかで，このことからとくに ι は単射になります（等長埋め込みといいます）．

V' に実際に含まれているのは，V ではなく ιV なのですが，$\iota\colon V \to \iota V$ は線型同型かつ等長なので，V と ιV はノルム空間として全く同じ構造を持ちます（等長同型といいます）．こういう状況で，細かいことを気にしないときは等長同型なノルム空間を同一視して，V は V' に（稠密に）“含まれている”と言うわけです．

[4]初めは自明なことを難しく書いているように見えるかも知れませんが，感覚が効かないくらい微妙な場面になると，厳密な定義のありがたみは分かるものです．そのときに初めてこの定義を見るよりは，分からなくても一度見た経験があった方がよいと思うので見せています．