ノルム空間の完備性

第 6 回に $L^2(-\pi,\pi)$ が完備であることを利用して，$f \in L^2(-\pi,\pi)$ の Fourier 級数が元の f に L^2 収束することを示しました．また表立っては述べていませんが，$C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi]$ が $\|\cdot\|_\infty$ について完備であることも，裏方としては使っています．完備なノルム空間は重要な対象なので名前がついています．

定義

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ が完備であるとは $\|\cdot\|$ に関する Cauchy 列が V 内に極限を持つことをいう．完備なノルム空間を Banach 空間という．

$\mathbb{R}^d$ や $\mathbb{C}^d$ は言うまでもなく Banach 空間です．そしてそのことが「最大値・最小値の存在定理」,「平均値の定理」,「連続関数の Riemann 積分可能性」などの，微積分の全ての重要な定理の基礎になっていました．このことから想像されるように Banach 空間は，解析学を展開するのに適切な舞台です．

完備なノルム空間の例

完備なノルム空間の例はすでに $(C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi], \|\cdot\|_\infty)$, $(L^p(\mu), \|\cdot\|_p)$ やその特別な場合として $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ を知っています [1]．新しい例を挙げると，

- 遠方で 0 に収束する数列の空間

$$c_0(\mathbb{N}) = \left\{ a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{C}, \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \right\}$$

  にノルム $\|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ を入れたもの，

- 遠方で 0 に収束する連続関数の空間

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \left\{ f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \,\middle|\, f \text{ は連続}, \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \right\}$$

  にノルム $\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|$ を入れたもの

はいずれも Banach 空間になります．ただし何も知らずに証明するのは結構大変で，後で使いやすい判定条件を示します．

[1] 関数空間と数列空間のノルムを区別したいときは $\|\cdot\|_{L^p}$ と $\|\cdot\|_{\ell^p}$，あるいは測度も明示するなら $\|\cdot\|_{L^p(\mu)}$ と書くこともあります．

完備なノルム空間の例

少し高度な例も挙げておくと,

- $C^1[0,1]$ と $\|f\|_{1,\infty} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$,
- 超関数の意味で微分可能な $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ で, $\|\nabla f\|_p < \infty$ を満たすものの全体 $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ と $\|f\|_{1,p} = \|f\|_p + \|\nabla f\|_p$,
- $C^\alpha[0,1] := \{f \mid \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\}$ と $\|f\|_{C^\alpha} = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x,y\in[0,1]} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$,
- X 上の複素測度 $\{\nu = \nu_1 - \nu_2 + i(\nu_3 - \nu_4) \mid \nu_1, \ldots, \nu_4 \text{は有限測度}\}$ と全変動ノルム $\|\nu\|_{\mathsf{TV}} = \sum_{j=1}^4 \nu_j(X)$

の組み合わせはいずれも Banach 空間になります. しかしこれらは一般論というより別の理論の一部として出会うと思いますので, そのときに確かめれば十分です.

完備性の判定条件

ノルム空間が完備であることは，「絶対収束級数がその中に極限を持つ」ことと同値です．これは L^p の完備性の証明でも使った考え方ですが，$c_0(\mathbb{N})$ や $C_0(\mathbb{R}^d)$ が完備であることを示すのにも役に立ちます．

命題

ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ が完備であることは，次と同値である：

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\| < \infty \text{ を満たす全ての } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V \text{ に対して，}$$
$$\text{ある } s \in V \text{ が存在して } \lim_{N\to\infty} \left\|s - \sum_{n=1}^{N} v_n\right\| = 0 \text{ となる．}$$

証明は，まず完備性を仮定すると $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\| < \infty$ から $(\sum_{n=1}^{N} v_n)_{N\in\mathbb{N}}$ は Cauchy 列であることが分かるので，V 内に極限を持ちます．
逆は，V の任意の Cauchy 列 $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ に対して $\|u_{m_{n+1}} - u_{m_n}\| \le 2^{-n}$ となる部分列をとって $v_n = u_{m_{n+1}} - u_{m_n}$ とおけば，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|v_n\| < \infty$ なので，仮定から $u_{m_{N+1}} = \sum_{n=1}^{N} v_n$ の極限は V 内に存在します．部分列の隙間を埋める議論は L^p のときと全く同じです． □

$C_0(\mathbb{R}^d)$ の完備性

前のページの判定条件を使って $C_0(\mathbb{R}^d)$ の完備性を示してみましょう．$(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0(\mathbb{R}^d)$ を $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty < \infty$ となる関数列とします．各点 $x \in \mathbb{R}^d$ で $|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty$ であることに注意すると，$\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty$ を優級数として Weierstrass の判定法が使えるので，$\sum_{n=1}^N f_n$ は $N \to \infty$ で一様収束（$= \|\cdot\|_\infty$ での収束）することが分かります．連続関数の一様収束極限は連続なので $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in C(\mathbb{R}^d)$ です．

あとは $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x) \to 0$ $(x \to \infty)$ を示せば，$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in C_0(\mathbb{R}^d)$ となるので命題が使えて $C_0(\mathbb{R}^d)$ の完備性が従います．このためにまず $\varepsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ を $\sum_{n>N} \|f_n\|_\infty < \varepsilon$ となるようにとります．そのあと，$R > 0$ を十分大きくとって $\sup_{|x|>R} \sum_{n=1}^N |f_n(x)| < \varepsilon$ とすれば，$|x| > R$ に対して

$$\left|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)\right| \leq \sum_{n=1}^N |f_n(x)| + \sum_{n>N} \|f_n\|_\infty < 2\varepsilon$$

なので，証明が終わります． $\square$

完備でないノルム空間の例

完備性は空気のようなもので，それがある状況を見てもなかなか意味が分かりません．完備でない空間と対比した方がよく分かると思います．

まずよく知っている例は $\mathbb{Q}$ で，ここでは二次方程式 $x^2 = 2$ すら解けないのでした．$\mathbb{Q}$ で微積分を展開しようとするとどれくらい悲惨なことになるかを考えるのは，よい思考実験だと思います．

次に第 5 回に $C[-1,1]$ が $\|\cdot\|_2$ では完備でないことに触れ，そのこととある変分問題が $C[-1,1]$ で解けないことの関係を説明しました．また Fourier 級数の文脈では，$C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi] \ni f \to \widehat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ は内積空間としての構造を保つものの全射ではなく，「何かが欠けている」のでした．このように，完備でない空間は解析学の舞台として不満のあるものです．

数列空間も例だけ挙げておくと，有限個の項を除いて 0 である数列の全体 $c_c(\mathbb{N})$ は，どんな $p \in [0,\infty]$ に対しても $\|\cdot\|_p$ で完備になりません．

ノルム空間の完備化

前のページで挙げた完備でないノルム空間は，$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$（ノルムは $|\cdot|$），$C_{\mathrm{per}}[-\pi,\pi] \subset L^2[-\pi,\pi]$（ノルムは $\|\cdot\|_2$），$c_c(\mathbb{N}) \subset \ell^p(\mathbb{N})$（ノルムは $\|\cdot\|_p$）と，全てある Banach 空間の部分空間になっていました．さらに $c_c(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$ を除いては，全て稠密な部分空間になっています．ノルム空間はいつでもこのように少し広げて完備にすることができるのでしょうか？

答えは YES で，とくに“最小”の完備な拡大には名前がついています．

定理

任意のノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ に対して，V を“含む”完備なノルム空間 $(V', \|\cdot\|')$ であって，$\|\cdot\|'$ は $\|\cdot\|$ の拡張であり，V は V' で稠密であるようなものが存在する．V' を V の完備化という．

この定理の（“ ”を外した）正確な意味と証明は，解析学を専門にする以外の人には難しいと思うので，補足資料に回します．とりあえず「$\mathbb{Q}$ の Cauchy 列の同値類として $\mathbb{R}$ を構成したのと同じ」と思って構いません．

完備化の理想（？）と現実

完備化の抽象的な存在は，理論上は役に立つことがありますが，実用上は具体性を欠いているので過大評価すべきではありません．例えば $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ に対しては，上の定理によらずとも $L^2(\mathbb{R})$ という完備で $C_c(\mathbb{R})$ を稠密に含む関数空間を知っています．一方で定理で存在が保証される完備化は抽象的なノルム空間であって，その要素が関数であるかどうかさえ明らかではありません．

補足資料の証明を読めばそれが「$C_c(\mathbb{R})$ の関数列の同値類の集合」であることはわかりますが，それでわかった気分になる人はいないでしょう[2]．

完備化を使って定義される重要な空間には，弱い意味で微分可能な関数の空間である Sobolev 空間があります．将来偏微分方程式を専門的に学ぶ人は，Sobolev の埋め込み定理という名前で，抽象的な完備化が関数空間と見なせることを一生懸命証明することになります．

[2]関数解析では $C_c(\mathbb{R})$ を変数とする連続線型関数全体を変数とする連続線型関数全体の中に埋め込んで閉包をとるという作り方も学びますが，それも慣れないと意味不明でしょう．