

今回は前半のまとめということで、Fourier 級数を中心に何ができたか、そのために何が必要だったかを振り返り、さらに L^2 理論について少し補足をします。まず第 1 回に設定した問題を思い出しましょう。

Fourier 展開 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ が ① ならば

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{inx}$$

が ② の意味で成り立つ。

前回までに次の三つの意味でこの展開が成り立つことを証明しました。

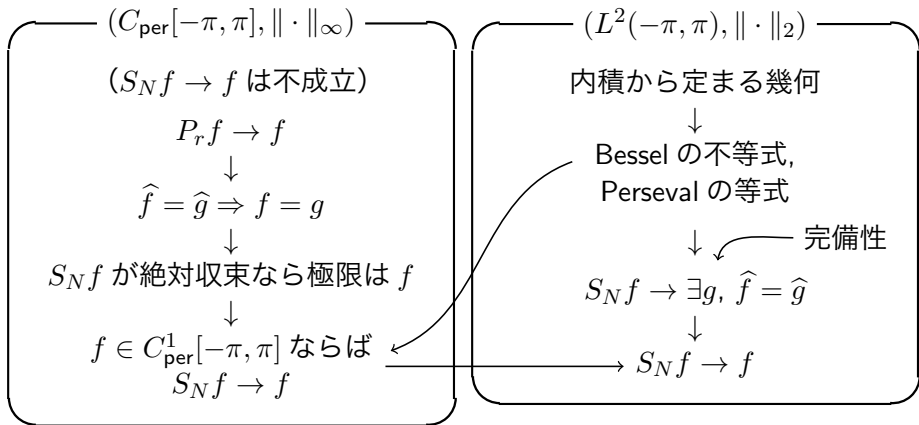
$$\textcircled{1} = C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \quad \textcircled{2} = \text{Abel 総和法の一様収束}$$

$$\textcircled{1} = C_{\text{per}}^1[-\pi, \pi], \quad \textcircled{2} = \text{一様収束}$$

$$\textcircled{1} = L^2(-\pi, \pi), \quad \textcircled{2} = \|\cdot\|_2 \text{に関する収束}$$

$\textcircled{1} = C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ または $L^1(-\pi, \pi)$ で $\textcircled{2} = \text{各点収束}$ は不成立です。

$(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_{\infty})$ と $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ での理論の展開は独立ではなく、以下のように関わっているのです。以下では Fourier 部分和を $S_N f = \sum_{n=-N}^N \hat{f}(n) e_n$ と略記します。



ただし一番下の $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ から $L^2(-\pi, \pi)$ への $\rightarrow$ では $C_{\text{per}}^{\infty}[-\pi, \pi]$ が $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ で稠密であるという事実も使っています。

これらの中で

- $P_r f \rightarrow f$ ($(C_{\text{per}}[-\pi, \pi], \|\cdot\|_\infty)$ と $(L^p(-\pi, \pi), \|\cdot\|_p)$),
- L^2 (とより一般に L^p) の完備性,
- $C_{\text{per}}^\infty[-\pi, \pi]$ の $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ での稠密性

はとくに深い結果であり, その考え方や使われ方は何度も繰り返して見ておく価値のあるものです.

証明を見ればほとんど全てが「単調収束定理」, 「Fatou の補題」, 「Lebesgue の収束定理」, 「Fubini の定理」といった Lebesgue 積分の理論に依存しており, そのことで Lebesgue 積分の意義も感じられるようになると思います.

とくに完備性の証明において, 表立って書いてはいませんが「可測関数の極限は可測」という事実が最も重要な役割を果たしていることが理解できれば, Riemann 積分との対比が明確になります.

以上が前回までのまとめで、あとは Fourier 級数の L^2 理論について前回の結果を使って分かることを三つ補足します。

命題

$L^2(-\pi, \pi) \ni f \mapsto \hat{f} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ は全単射である。

まず $\hat{f} = \hat{g}$ なら $f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N f = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N g = g$ が L^2 収束として成り立つので $f = g$ です。これで単射であることが分かりました。

次に任意の $a = (a_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ をとると、第4回の最初に $S_N f$ が Cauchy 列であることを示したのと全く同じ議論で $\sum_{n=-N}^N a_n e_n$ は $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_2)$ の Cauchy 列であることが分かるので、極限 $f \in L^2(-\pi, \pi)$ が存在します。このとき形式的には

$$\begin{aligned}\hat{f}(m) &= \left\langle \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N a_n e_n, e_m \right\rangle \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{n=-N}^N a_n e_n, e_m \right\rangle = a_m\end{aligned}$$

となるので、全射であることも分かりました。



定理 (Parseval の等式)

任意の $f \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{\ell^2}$ である^a.

^aノルムは両方 $\|\cdot\|_2$ と書くと紛らわしいので区別しました. 念のためですが $\|a\|_{\ell^2} = (\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2)^{1/2}$ です.

これは連続関数に対しては第3回資料8ページで示しました. そこで $C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ が $(L^2(-\pi, \pi), \|\cdot\|_{L^2})$ で稠密であることを使って, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f_k\|_{L^2} = 0$ となる $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_{\text{per}}[-\pi, \pi]$ をとります. すると Bessel の不等式から

$$\|\hat{f} - \hat{f}_k\|_{\ell^2}^2 = \|\widehat{f - f_k}\|_{\ell^2}^2 \leq \|f - f_k\|_{L^2}^2 \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

となります. あとは Minkowski の不等式を少し変形して使えば

$$\begin{aligned} \left| \|f\|_2 - \|f_k\|_{L^2} \right| &\leq \|f - f_k\|_{L^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \|\hat{f}\|_{\ell^2} - \|\hat{f}_k\|_{\ell^2} \right| &\leq \|\hat{f} - \hat{f}_k\|_{\ell^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

となって証明が終わります.

Parseval の等式は $f \mapsto \hat{f}$ が距離を保つ写像（等長写像）であることを示しています。このことからより強く内積を不変にすることも分かります。

命題

任意の $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$ に対して $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{\ell^2}$ が成り立つ。

これは一般に内積がノルムを使って

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4} \{ (\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2) \}$$

と表せることを使えば、Parseval の等式から直ちに分かります。 □

今回示した三つの結果は、 $L^2(-\pi, \pi)$ と $\ell^2(\mathbb{Z})$ が内積空間として全く同じ構造を持っていることを示しています。従って関数空間 $L^2(-\pi, \pi)$ の問題を数列空間 $\ell^2(\mathbb{Z})$ に移して考えることができます。このとき微分が掛け算に変わる $\hat{f}'(n) = in\hat{f}(n)$ のように、ある種の操作は簡単になり、それが Fourier 級数を使って微分方程式が解けることの背景になっています。